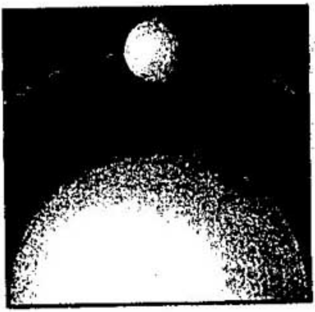
I.K. KIKOIN

FISICA

2

FÍSICA 2



И.К.Кикоин

А.К.Кикоин

"Физика"

Учебник для

8 класса

Москва

"Просвещение"

I.K.Kikóin, A.K.Kikóin

FÍSICA 2

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

Editorial Mir Moscú

Impreso en la URSS

На испанском языке

Índice

Mecánica

Introducción

En las ciencias denominamos MATERIA todo aquello que realmente existe en la Tierra, así como fuera de ella. Son de materia la enorme diversidad de cuerpos que nos rodean y las sustancias de las que los primeros están compuestos. El sonido, la luz y las ondas hertzianas, a pesar de no poder ser llamados cuerpos, también son materia, o sea, existen realmente. La expresión "existen realmente" quiere decir que uno u otro objeto (en general, el mundo material que nos rodea) es precisamente aquello que existe fuera de nuestra conciencia.

Una de las fundamentales propiedades de la materia es su variabilidad. Todos los posibles cambios que tienen lugar en el mundo material, las variaciones de la materia, reciben el nombre de FENÓMENOS de la naturaleza.

La física es una de las ciencias sobre la naturaleza inanimada. Estudia las propiedades de la materia, todas sus posibles variaciones (fenómenos de la naturaleza), las leyes que describen dichos cambios, la ligazón entre los fenómenos.

La física se distingue de otras muchas ciencias, digamos de la biología, en que al estudiar las propiedades de la materia, sus variaciones se introducen diversas magnitudes físicas que pueden ser medidas y expresadas con números. Gracias a esto, el transcurso de los fenómenos y la ligazón entre ellos, se expresan con correlaciones matemáticas entre las magnitudes introducidas. Las más importantes ligazones entre los fenómenos de la naturaleza, denominadas LEYES O PRINCIPIOS, también se han expresado en forma de correlaciones matemáticas.

El famoso sabio italiano Galileo Galilei, señaló con perfección la importancia de las matemáticas: "La filosofía[1] está escrita en ese grandioso Libro, siempre abierto ante nuestros ojos (me refiero al Universo), pero que es imposible comprender si no aprendemos de antemano su lengua y no conocemos las letras con que está escrito. Su lengua es la de las matemáticas y las letras son triángulos y otras figuras geométricas, sin las cuales no se puede comprender ni siquiera una palabra en él: sin ellas sólo podremos andar a ciegas por un oscuro laberinto".

No todas las propiedades de la materia y todas las leyes de la naturaleza se conocen. Pero el desarrollo de la física y de otras ciencias muestra que no hay en el mundo tales fenómenos que no puedan ser estudiados, conocidos, comprendidos. La cognoscibilidad del mundo material también puede ser

[1] En los tiempos de Galilei la física era llamada filosofía.

considerada como una de sus fundamentales propiedades.

El conocimiento de las propiedades de la materia, las leyes de su variación (leyes de la naturaleza), corresponde a la tendencia natural del hombre, dirigida a conocer y comprender el mundo que nos rodea. Por está razón, estos conocimientos constituyen una importante parte de la cultura humana. Pero, además, las ciencias acerca de la naturaleza tienen un significado práctico impotantísimo. Ellas permiten conocer con anticipación el transcurso de unos u otros fenómenos, procesos, sin los que se hace imposible toda producción. Por ejemplo, antes de que la máquina sea construida, el ingeniero sabe cómo va a funcionar, ya que al elaborar su proyecto hizo uso de los datos que ofrecen las ciencias y, ante todo, la física. El conocimiento de las leyes de la naturaleza no sólo permite prever el futuro, sino que, además, explicar el pasado, pues las leyes de la naturaleza eran en el pasado las mismas que hoy y siempre seguirán siendo iguales.

Hoy día es de particular importancia la posibilidad de prever el futuro, puesto que las actividades de la humanidad, equipada de poderosa técnica, ejercen gran influencia en el medio que nos rodea. Con el fin de que ésta no cause a la humanidad irreparables infortunios, hay que poder prever sus consecuencias. Para ello, hay que conocer en el más alto grado las leyes de la naturaleza y, entre ellas, las que estudia la física.

Entre las variaciones que se producen en el mundo material que nos rodea, de todos los fenómenos de la naturaleza, el más conocido por todos es el MOVIMIENTO MECÁNICO. La parte de la física que estudia este fenómeno recibe el nombre de MECÁNICA, la que trataremos en este libro.

Fundamentos de cinemática

1 GENERALIDADES SOBRE EL MOVIMIENTO

PROBLEMA FUNDAMENTAL DE MECÁNICA

Todo lo que ocurre en el mundo transcurre en algún lugar y en cierto instante, en el espacio (¿dónde?) y con el correr del tiempo (¿cuándo?). En particular, cada cuerpo en todo momento de tiempo ocupa en el espacio determinada posición respecto de otros cuerpos. Si con el transcurso del tiempo dicha posición del cuerpo en el espacio varía, decimos que el cuerpo se mueve, realiza *movimiento mecánico.*

Recibe el nombre de movimiento mecánico de un cuerpo, la variación con el tiempo de su posición en el espacio en relación con otros cuerpos.

El estudio del movimiento del cuerpo significa conocer cómo varía su posición con el correr del tiempo. Cuando esto es conocido, podremos saber (calcular) las posiciones del cuerpo en cualquier momento de tiempo. En esto consiste, precisamente, el PROBLEMA FUNDAMENTAL de mecánica, es decir, *definir la posición del cuerpo en todo momento de tiempo.* Por ejemplo, haciendo uso de las leyes de mecánica, los astrónomos pueden calcular la posición de los cuerpos celestes entre sí y con gran precisión predecir semejantes fenómenos celestes como los eclipses del Sol y de la Luna. ¡Y no sólo predecir! Verbigracia, si los historiadores no conocieran la fecha exacta del comienzo de la campaña del príncipe Igor contra los pólovtsi, aquélla podría ser calculada por los astrónomos. En el famoso "Cantar de las huestes de Igor", donde se decanta dicha campaña, se habla de un eclipse solar total, que coincidió con la entrada de Igor en las tierras de los pólovtsi. Esto es más que suficiente para constatar que las huestes de Igor llegaron a las fronteras de sus enemigos el 1 de mayo de 1185[1].

Los cuerpos pueden realizar los movimientos mecánicos más diversos: moverse por diferentes trayectorias, con mayor o menor rapidez, etc. Para resolver el problema fundamental de mecánica, hay que poder indicar, con brevedad y precisión, cómo se mueve el cuerpo, cómo con uno u otro movimiento varía su posición en el transcurso del tiempo. Con otras palabras,

[1] Aquí es imposible equivocarse, ya que es sabido que en un mismo lugar un eclipse solar total sucede, aproximadamente, una vez cada 200 años. En el siglo XII en la región de las estepas del Don sólo pudo haber un eclipse.

es preciso hallar la *descripción* matemática del movimiento, o sea, establecer el enlace entre las magnitudes que caracterizan el movimiento mecánico. En la primera parte de la mecánica, llamada CINEMÁTICA, examinaremos dichas magnitudes y los enlaces entre ellas.

Por esta causa, las magnitudes que se introducen para describir el movimiento mecánico reciben el nombre de MAGNITUDES CINEMÁTICAS.

1.1. Movimiento de traslación de los cuerpos. Punto material

Para poder estudiar el movimiento del cuerpo, es decir, la variación de su posición en el espacio, ante todo hay que saber definir ésta. Pero aquí surge cierta dificultad. Cada cuerpo tiene determinadas dimensiones, por lo tanto, sus partes diversas, diferentes puntos, se hallan en distintos lugares del espacio. ¿Cómo definir la posición del cuerpo en su total? Esto es difícil de hacer en el caso general. Pero resulta que en múltiples casos no es preciso indicar la posición de cada uno de los puntos del cuerpo en movimiento.

Esto puede no hacerse en aquellos casos cuando todos los puntos del cuerpo se mueven de la misma forma.

Por ejemplo, ¿con qué fin hay que describir el movimiento de cada punto de un trineo, que un niño arrastra cuesta arriba, si estos movimientos en nada difieren entre sí?

Del mismo modo se mueven todos los puntos de una barcaza que navega por un río, de una maleta que levantamos del suelo (fig. 1), todos los puntos de la flecha de una brújula (véase la cubierta del libro), etc.

Recibe el nombre de traslación el movimiento de un cuerpo, con el que todos sus puntos se mueven del mismo modo.

Con el movimiento de traslación, toda recta trazada mentalmente en el cuerpo, queda en todo momento paralela a sí misma.

En adelante, principalmente, vamos a estudiar el movimiento de traslación.

No habrá que describir el movimiento de cada punto del cuerpo, en aquellos casos *en que las dimensiones de éste son pequeñas en comparación con la distancia que recorre o bien con la distancia que lo separa de otros cuerpos.*

En semejantes casos podemos despreciar las dimensiones del cuerpo. Por ejemplo, un transatlántico es pequeño en comparación con la longitud de su ruta, por lo que al describir su movimiento por el océano se considera que la nave es un punto.

De este mismo modo actúan en astronomía al estudiar los cuerpos celestes. Los planetas, las estrellas, el Sol no son pequeños cuerpos. Pero, por ejemplo, el radio de la Tierra es ≈ 24 000 veces menor que la distancia desde nuestro planeta hasta el Sol. Por esto, podemos considerar que la Tierra es un punto

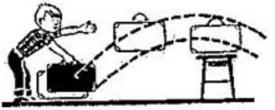
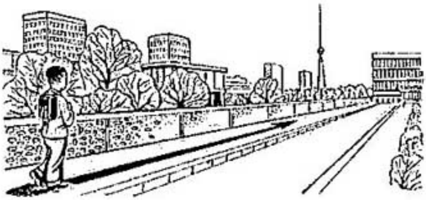


Fig. 1



a)

b)

Fig. 2

que se mueve alrededor de otro, es decir, del centro del Sol.

· Cuando más adelante hablemos del movimiento de un cuerpo, en realidad tendremos en cuenta el movimiento de cierto punto de este cuerpo. Pero no hay que olvidarse que dicho punto es material, o sea, que difiere de los cuerpos corrientes tan sólo en que no tiene dimensiones.

Llamamos punto material a un cuerpo cuyas dimensiones pueden ser despreciadas en las condiciones dadas de movimiento.

Las palabras "en las condiciones dadas" quieren decir que un mismo cuerpo puede ser considerado punto material con algunos de sus movimientos, mientras que con otros, no. Por ejemplo, cuando un niño, yendo a la escuela, pasa desde su casa una distancia de 1 km (fig. 2, *a*), para semejante movimiento podemos considerar que es un punto material, ya que las dimensiones del escolar son pequeñas en comparación con la distancia que él vence. Pero cuando ese mismo niño hace los ejercicios de la gimnasia matinal (fig. 2, *b*), ya no podemos considerar que es un punto material.

¿ ?

En cuáles de los siguientes casos podemos considerar que el cuerpo es un punto material:

1. En un torno se maquina un disco para deporte. Después de ser lanzado por el deportista, ese mismo disco vuela una distancia de 55 m.
2. Un avión de pasajeros vuela de Moscú a Jabárovsk (Extremo Oriente). El avión realiza la figura de acrobacia aérea, llamada "barrena", girando en torno a su eje.
3. Un patinador de patinaje de velocidad cubre la distancia de las competiciones. Un patinador de patinaje artístico realiza las figuras de los ejercicios libres.
4. El movimiento de una nave cósmica se observa desde el centro de mando en la Tierra. Esa misma nave es observada por el cosmonauta que realiza el acoplamiento en el Cosmos.

1.2. Posición del cuerpo en el espacio. Sistema de referencia

¿Cómo definir la posición del cuerpo? En un antiguo documento, que se refiere al comienzo de nuestra era, se expone la siguiente descripción del lugar donde se hallaba un tesoro: "Ponte en la esquina oriental de la última casa del pueblo de cara al norte y, después de

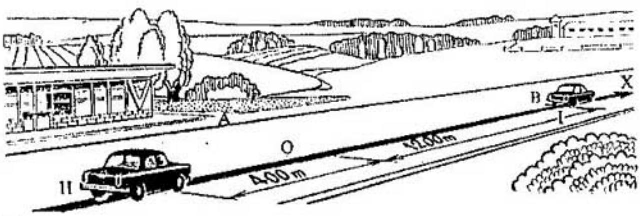


Fig. 3

pasar 120 pasos, da la vuelta poniendo la cara hacia oriente y anda 200 pasos. En este lugar haz un pozo de 10 codos de profundidad y allí hallarás 100 talentos de oro". Si el pueblo y la casa indicados en el documento se hubieran conservado hasta nuestros días, sería fácil encontrar el tesoro. Pero por muy comprensibles causas, nada ha quedado del pueblo y de la casa y, por lo tanto, es imposible encontrar el tesoro. Este ejemplo nos muestra que la posición de un cuerpo o de un punto sólo se puede prefijar EN RELACIÓN CON CUALQUIER OTRO CUERPO, llamado DE REFERENCIA.

El cuerpo de referencia puede ser elegido de modo completamente arbitrario. Como tal, puede servir la casa donde habitamos, el vagón del tren en el que viajamos y, en general, cualquier cuerpo. También pueden ser cuerpos de referencia la Tierra, el Sol, las estrellas.

COORDENADAS DE UN PUNTO. Después de elegido el cuerpo de referencia, por algunos de sus puntos se trazan los ejes de coordenadas y la posición de cualquier punto del cuerpo queda definida por sus coordenadas. Cómo se hace esto, se conoce del curso anterior de matemáticas.

Por ejemplo, definamos la posición de dos automóviles *I* y *II* en la carretera (fig. 3). A lo largo de ella trazamos el eje de coordenadas OX con origen de referencia (origen de coordenadas) en el punto O. Las coordenadas trazadas a la derecha del punto O vamos a considerar que son positivas, a la izquierda, negativas. En tal caso, la posición del automóvil *I* vendrá definida por la coordenada $x_I = |OB|$. En la fig. 3 la escala se ha elegido de forma que $x_I = 1200$ m. La coordenada del automóvil *II* se expresará con el número 400 m.

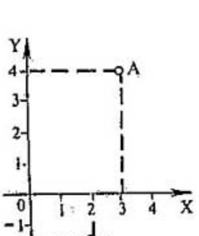


Fig. 4

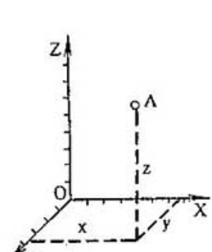


Fig. 5

pero como tendrá que contarse a la izquierda del origen de referencia, $x_{II} = -$
-400 m.

Así, pues, la posición de un cuerpo que yace en una recta se define con una coordenada.

Si el cuerpo puede moverse dentro de los límites de cierto plano (por ejemplo, una barca por un lago), por los puntos elegidos en el cuerpo de referencia se trazan dos coordenadas: OX y OY. La posición del punto en el plano se define con dos coordenadas x e y. Por ejemplo, las coordenadas del punto A (fig. 4) son las siguientes: $x = 3$, $y = 4$; las de B, $x = 2$, $y = -1{,}5$.

Por último, para prefijar la posición de un cuerpo en el espacio (por ejemplo, la posición de un avión en el aire), hay que trazar por el cuerpo de referencia tres ejes de coordenadas perpendiculares entre sí: OX, OY, OZ (fig. 5). De acuerdo con esto, la posición de un cuerpo (punto) en el espacio se determina con tres coordenadas: x, y, z.

Semejante sistema de coordenadas fue utilizado en el documento sobre el tesoro, indicado al principio del parágrafo. Para hallarlo, sólo es preciso conocer el lugar donde está el cuerpo de referencia.

De forma que *la posición del punto en la línea, el plano y el espacio se define con uno, dos o tres números: coordenadas, respectivamente*. Suele decirse que el espacio en que vivimos es de tres mediciones o bien ESPACIO TRIDIMENSIONAL.

En adelante vamos a tropezar, principalmente, con movimientos a lo largo de líneas o por planos prefijados. Por esto, tendremos que hacer uso bien de una, o bien de dos coordenadas.

SISTEMA DE REFERENCIA. Ya hemos dicho que la mecánica es la ciencia que permite determinar la posición del cuerpo en cualquier momento de tiempo. Como ésta viene definida por las coordenadas de sus puntos, el problema fundamental de mecánica se reduce a *saber calcular las coordenadas de dichos puntos en cualquier momento de tiempo.*

El sistema de coordenadas, el cuerpo de referencia, con el que el primero está enlazado y la indicación del origen de registro del tiempo, forman el sistema de referencia con relación al cual se examina el movimiento del cuerpo.

Durante el movimiento del cuerpo, las coordenadas de sus puntos varían. Por ejemplo, si las coordenadas de un punto contadas por los ejes X, Y, y Z eran en el momento inicial de tiempo $t = 0$ igual a x_0, y_0, z_0 y después de cierto intervalo de tiempo t, resultaron respectivamente x, y, z, esto significa que en el transcurso del tiempo indicado la coordenada x ha cambiado en la magnitud $x - x_0$, la coordenada y, en la magnitud $y - y_0$ y la coordenada z, en la magnitud $z - z_0$. Las magnitudes $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ son las *variaciones* de las coordenadas x, y, z. En ciertas ocasiones, dichas variaciones serán designadas por Δ (letra griega "delta"), por ejemplo: $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$.

1.3. Primera magnitud cinemática: el desplazamiento

Con las variaciones de las coordenadas está ligada la primera de las magnitudes que se introducen para describir el movimiento, sobre la que se habló en la introducción a este capítulo, a saber, el DESPLAZAMIENTO. ¿Qué representa en sí esta magnitud?

Supongamos que en cierto momento inicial de tiempo, el cuerpo (el punto) en movimiento ocupaba la posición M_1 (fig. 6), pero después de cierto intervalo de tiempo resultó estar en otra posición a una distancia s de la inicial. ¿Cómo hallar la nueva posición del cuerpo? Por lo visto, para esto es insuficiente conocer la distancia s, ya que hay un innumerable conjunto de puntos alejados del punto M_1 a esa misma distancia (véase la fig. 6).

Con el fin de hallar la posición del cuerpo, hay que conocer, además, la dirección del segmento que une la posición inicial del cuerpo con la siguiente. Este segmento dirigido de una recta es, precisamente, el desplazamiento del cuerpo. El extremo del segmento que representa el desplazamiento, para mayor evidencia, se marca con una flecha (fig. 7, *a*). Ubicando el segmento en el punto M_1, al final de la flecha hallaremos la nueva posición del cuerpo M_2 (fig. 7, *b*).

Recibe el nombre de desplazamiento de un cuerpo (punto material) el segmento dirigido de una recta que une la posición inicial del cuerpo con su siguiente posición.

En el curso de geometría se indica que el desplazamiento de un punto se prefija por un vector llamado vector de desplazamiento.

Las magnitudes vectoriales se designan con letras, sobre las cuales se traza una flecha. Por ejemplo, $\vec{s}$ es el vector de desplazamiento. El módulo (o largura) del indicado vector es un número que muestra a cuántas unidades de longitud, en determinada escala (metros, kilómetros, etc.), es igual el desplazamiento. El módulo del vector se designa con la misma letra que el propio vector, pero sin flecha. Así, pues, s es el módulo del vector $\vec{s}$.

El desplazamiento es una magnitud singular. La llamamos singular a causa de que el desplazamiento, como todo vector, se prefija no sólo con un determinado número, sino que también con la dirección.

Las magnitudes que en el espacio no tienen dirección, o sea, que vienen

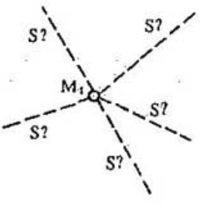


Fig. 6

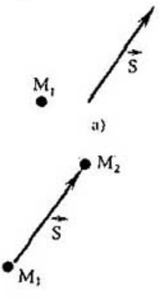


Fig. 7

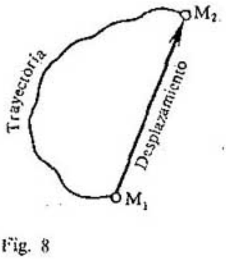


Fig. 8

Fig. 9

definidas sólo por números, aunque concretos, reciben el nombre de MAGNITUDES ESCALARES o simplemente, ESCALARES. Por ejemplo, semejantes magnitudes son el tiempo, el volumen, la temperatura, etc.

Hay que distinguir el desplazamiento del cuerpo y la longitud de la trayectoria de su movimiento. De que el cuerpo se ha desplazado del punto M_1 al M_2 (fig. 8) y de que la largura de su desplazamiento es igual a la longitud del segmento $|M_1M_2|$ no se desprende que el cuerpo se movió por la recta M_1M_2. La trayectoria de movimiento del cuerpo, o sea, la línea por la que en realidad él se movió, puede no coincidir con dicha recta. Esto se aclara en el siguiente ejemplo.

En la fig. 9 se muestra el mapa geográfico de una parte del Mar Negro. La distancia entre Odesa y Sevastopol por una recta es igual a 270 km. Para ir de Odesa a Sevastopol hay que realizar un desplazamiento dirigido, aproximadamente, al sudeste y numéricamente igual a 270 km. Si salimos de Odesa en barco, su movimiento real transcurrirá por una recta que coincidirá con el desplazamiento. Pero de Odesa a Sevastopol se puede ir en tren. La vía férrea pasa por Nikolayev, Jersón, Dzhankoi. Su longitud es de 660 km. Al viajar en tren, la trayectoria de movimiento no coincide ya con el desplazamiento.

Está claro, que si nos interesa la posición final del tren respecto de Odesa, ésta se determina por el desplazamiento Odesa–Sevastopol. Si sabemos que dicho desplazamiento está dirigido por la recta Odesa–Sevastopol y constituye 270 km, esta información es suficiente para saber dónde se encuentra el tren. Pero si decimos que el tren ha recorrido un camino igual a 660 km, semejante dato no nos permite saber dónde estará aquél: de Odesa el tren pudo dirigirse a Moscú, Kiev, Járkov o a cualquier otra ciudad. Así pues, para hallar la posición del cuerpo en todo momento de tiempo, hay que conocer su *posición inicial* y el *desplazamiento* realizado hasta dicho momento.

2–948

¿ ?

1. La observación de los movimientos de los futbolistas ha mostrado que, durante el partido, el delantero recorre, aproximadamente, 12 km. ¿Cómo se deberá llamar la magnitud aducida: desplazamiento o longitud del camino?
2. Un piloto, al determinar por la mañana la posición del buque, descubre que éste se encuentra en un punto situado a 100 km hacia el Norte del punto en que se encontraba el buque la tarde anterior. ¿Qué expresa el número aquí indicado: el valor absoluto del desplazamiento o el camino recorrido?
3. El encargado de un garage, al recibir del chófer que había acabado el trabajo el automóvil, anotó un aumento de las indicaciones del contador igual a 300 km. ¿Qué significa esto: el camino recorrido o el valor absoluto del desplazamiento?

1.4. Proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas y operaciones con ellas

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE EL EJE DE COORDENADAS. Ya se ha dicho que, si se conoce el vector de desplazamiento del cuerpo $\vec{s}$ (consideramos el cuerpo como un punto material) y son conocidas las coordenadas de la posición inicial de éste, es posible hallar también las coordenadas de su siguiente posición.

Pero semejante problema no puede ser resuelto sin conocer una importante noción más, a saber, la PROYECCIÓN del vector en el eje de coordenadas.

En la fig. 10 están representados el eje X y el vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ que con el eje X yace en un mismo plano.

Desde el origen A y el extremo B del vector $\vec{a}$ trazamos las perpendiculares AA_1 y BB_1 al eje X. Las bases de las perpendiculares, los puntos A_1 y B_1, son las proyecciones de los puntos A y B sobre el eje X.

$|A_1B_1|$ entre las proyecciones del origen y el extremo del vector sobre el eje, tomada con el signo "+" o "−", recibe el nombre de proyección del vector $\vec{a}$ sobre el eje X.

La proyección se considera positiva si desde la proyección del origen a la proyección del extremo del vector hay que avanzar en dirección del eje y negativa, en el caso contrario.

De acuerdo con esta regla, la proyección del vector $\vec{a}$ (fig. 10) es positiva,

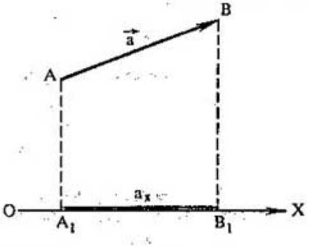


Fig. 10

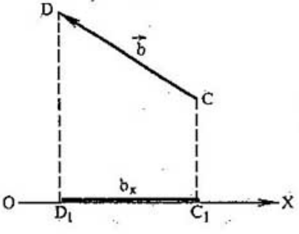


Fig. 11

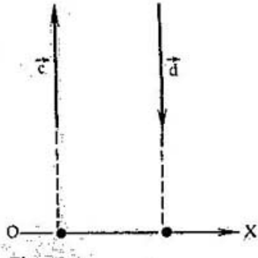


Fig. 12

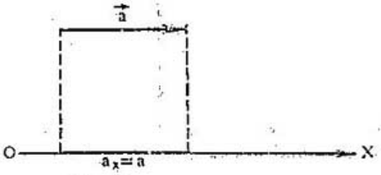


Fig. 13

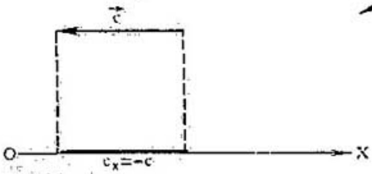


Fig. 14

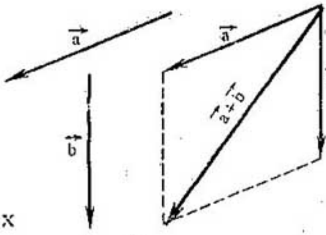


Fig. 15

mientras que la del vector $\vec{b}$ (fig. 11), negativa. Es fácil comprender que si el vector es perpendicular al eje (fig. 12), su proyección sobre éste será nula.

La proyección del vector sobre el eje se designa con la misma letra que aquél, pero sin la flecha encima y con el subíndice del eje. En nuestros ejemplos, la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el eje X debe ser designada a_x y la del vector $\vec{b}$ sobre dicho eje, b_x. Haciendo uso de las designaciones adoptadas, podemos escribir

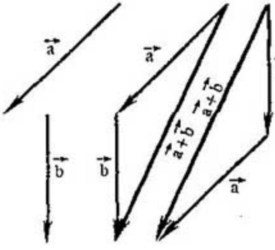
$$a_x = |A_1B_1|, \quad b_x = -|C_1D_1|, \quad c_x = d_x = 0.$$

La proyección del vector sobre el eje es fácil de hallar, cuando el primero es paralelo al segundo. A saber, si el vector y el eje tienen una misma dirección (fig. 13), la proyección del vector es igual a su módulo, en tanto que si el vector y el eje tienen direcciones inversas (fig. 14), la proyección del vector será igual a su módulo con signo " – ". Esto es también válido cuando el vector yace en el eje.

OPERACIONES CON VECTORES Y SUS PROYECCIONES. Como sabemos del curso de geometría, las operaciones con vectores se efectúan de acuerdo con reglas especiales que no se parecen a las que se aplican al operar con números corrientes.

Recordemos dichas reglas.

En la fig. 15 se muestra la suma de dos vectores según la regla del paralelogramo, mientras que la fig. 16 nos ofrece esa misma operación según la regla del triángulo. La suma de varios vectores se representa en la fig. 17. La regla para sustraer los vectores se ilustra en la fig. 18.



a) b)

Fig. 16

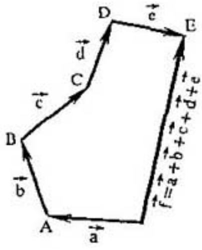


Fig. 17

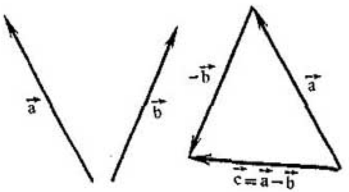


Fig. 18

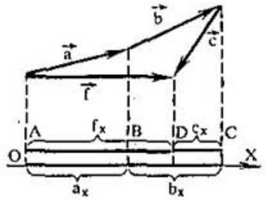


Fig. 19

¿Cómo se halla la proyección de un vector que es la suma de varios vectores? En la fig. 19 se dan los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y se muestra el vector resultante $\vec{f}$, igual a la suma de los tres primeros:

$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

En esta figura vemos que las proyecciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sobre el eje X son positivas, mientras que la de $\vec{c}$, negativa. También vemos que la proyección del vector resultante $\vec{f}$ se obtiene al adicionar de forma algebraica las proyecciones de los tres vectores que se suman, es decir, tomando en consideración que la proyección del vector $\vec{c}$ es negativa.

Por lo tanto, *la proyección de la suma de vectores sobre cierto eje, es igual a la suma algebraica de las proyecciones de los vectores que se adicionan sobre ese mismo eje.* Por esta razón, para hallar la proyección de la suma de vectores, no es preciso encontrar el vector resultante y determinar su proyección. Simplemente hay que sumar las proyecciones de todos los vectores, teniendo en cuenta sus signos.

Es fácil cerciorarse de que *la proyección sobre el eje de la diferencia entre vectores, es igual a la diferencia algebraica de sus proyecciones sobre ese mismo eje, mientras que la proyección sobre el eje del producto de un vector por un número, es igual a la proyección de dicho vector sobre el mismo eje multiplicada por ese número.*

1.5. Proyecciones de un vector y coordenadas

¿Cómo determinar las coordenadas de la siguiente posición del cuerpo (punto material), conociendo las coordenadas de su posición inicial y el vector de desplazamiento?

Aclaremos esto en el ejemplo del movimiento de un cuerpo en el plano.

Sea que el cuerpo ha realizado el desplazamiento $\vec{s} = \overline{M_0M}$. Tomemos el sistema de coordenadas XOY de forma que el vector $\overline{M_0M}$ se encuentre en el plano XOY (fig. 20).

Las coordenadas de la posición inicial del cuerpo (punto M_0) son designadas por x_0 e y_0, en tanto que las coordenadas de la siguiente posición (punto M), x e y.

En la fig. 20 vemos que $|OP| = |OP_0| + |P_0P|$, pero $|OP| = x$, $|OP_0| = x_0$ y $|P_0P| = s_x$.

Así, pues,

$$\boxed{x = x_0 + s_x.} \tag{1}$$

En esa misma figura también vemos que $|OQ| = |OQ_0| - |QQ_0|$. Pero $|OQ| = y$, $|OQ_0| = y_0$ y $-|QQ_0| = s_y$ (la proyección del vector de desplazamiento $\vec{s}$ en el eje Y es negativa), de aquí

$$\boxed{y = y_0 + s_y.} \tag{2}$$

Las fórmulas (1) y (2) son justas para cualquiera otra disposición del vector $\overline{M_0M}$ en el plano XOY.

De las fórmulas (1) y (2) se desprende que la proyección del vector de desplazamiento sobre los ejes X o Y es igual a la diferencia de las coordenadas del extremo y el origen de dicho vector:

$$s_x = x - x_0, \quad s_y = y - y_0.$$

La diferencia entre las posiciones siguiente e inicial de cualquier magnitud recibió el nombre de VARIACIÓN DE ÉSTA. Por lo tanto, la proyección del vector de desplazamiento $\vec{s}$ sobre el eje X o bien Y es igual a la variación de la

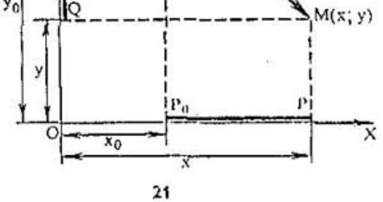


Fig. 20

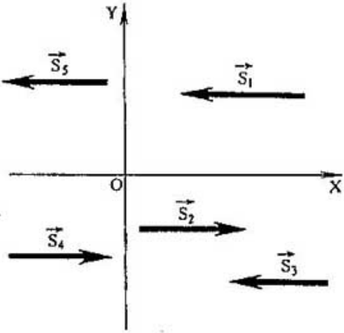


Fig. 21

correspondiente coordenada.

Si la coordenada del punto aumenta con el correr del tiempo, la variación de aquélla y, por consiguiente, la proyección del vector de desplazamiento sobre el eje, son positivas. Cuando la coordenada disminuye, su variación y la proyección del vector de desplazamiento son negativas.

En la fig. 20 se muestra tal desplazamiento del punto, con el que la coordenada x aumenta, mientras que la y disminuye. Esto quiere decir, que la proyección del vector $\vec{s}$ sobre el eje X es positiva ($s_x > 0$), en tanto que sobre el eje Y, negativa ($s_y < 0$).

¿ ?

1. ¿Qué se denomina proyección de un vector sobre el eje?
2. ¿Cómo está ligado el vector de desplazamiento de un cuerpo con sus coordenadas?
3. ¿Cuáles serán el módulo y signo de las proyecciones del vector de desplazamiento si éste es paralelo a uno de los ejes de coordenadas?
4. Determinar los signos de las proyecciones sobre el eje X de los vectores de desplazamiento mostrados en la fig. 21. ¿Cómo varían las coordenadas del cuerpo con dicho desplazamiento?
5. ¿Por qué en mecánica es más importante el vector de desplazamiento del cuerpo que el trayecto que éste ha recorrido?
6. ¿Puede ser pequeño el módulo del vector de desplazamiento, si el valor del camino recorrido es grande? Ofrecer ejemplos.

Ejercicios 1

1. En el momento inicial de tiempo el cuerpo se encontraba en el punto con las coordenadas $x_0 = -2$ m e $y_0 = 4$ m. El cuerpo se ha desplazado al punto con las coordenadas $x = 2$ m e $y = 1$ m. Hallar las proyecciones del vector de desplazamiento sobre los ejes X e Y. Trazar el vector de desplazamiento del cuerpo.
2. Un cuerpo ha recorrido cierto camino desde el punto inicial con las coordenadas $x_0 = -3$ m e $y_0 = 1$ m, de forma que la proyección de vector de desplazamiento sobre el eje X resultó ser igual a 5,2 m y sobre el eje Y a 3 m. Hallar las coordenadas de la posición final del cuerpo. Trazar el vector de desplazamiento. ¿Cuál es su módulo?
3. Una persona a quien le gusta pasear ha recorrido 5 km en dirección

Sur, seguidamente 12 km en dirección oriental. ¿A qué es igual el módulo del desplazamiento realizado por dicha persona?

Tarea

Cerciorarse de que las fórmulas (1) y (2) son justas para cualquier disposición del vector $\overline{M_0M}$, distinta de la mostrada en la fig. 20.

1.6. Movimiento rectilíneo. Segunda magnitud cinemática: la velocidad

Con el fin de hallar en cualquier momento de tiempo las coordenadas de un cuerpo en movimiento, como vimos en 1.5, hay que conocer las proyecciones del vector de desplazamiento sobre los ejes de coordenadas (por lo tanto, también el propio vector). ¿Cómo hallar el vector de desplazamiento? ¿Qué hay que saber para ello?

Primero, vamos a estudiar el tipo más sencillo de movimiento, es decir, el RECTILÍNEO UNIFORME.

Recibe el nombre de rectilíneo uniforme el movimiento con el que el cuerpo realiza iguales desplazamientos en el transcurso de iguales intervalos de tiempo.

VELOCIDAD. Para definir el desplazamiento de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme durante cierto intervalo de tiempo t, por lo visto, será necesario conocer qué desplazamiento realiza el cuerpo por unidad de tiempo. Está claro, que en caso de cualquiera otra unidad de tiempo, se realizará un desplazamiento igual. El desplazamiento efectuado por unidad de tiempo se denomina VELOCIDAD del cuerpo y esta magnitud se designa con la letra v. Puede ser definida midiendo cualquier sector del recorrido, incluso el más pequeño, y el intervalo de tiempo durante el que dicho sector fue vencido. Si designamos el desplazamiento en ese sector por $\Delta\vec{s}$ y el intervalo de tiempo por Δt, la velocidad será igual a la razón entre $\Delta\vec{s}$ y Δt.

Recibe el nombre de velocidad del movimiento rectilíneo uniforme la magnitud igual a la razón entre el desplazamiento del cuerpo durante cualquier intervalo de tiempo y el valor de éste[1].

Como $\Delta\vec{s}$ es una magnitud vectorial, mientras que Δt, escalar, la velocidad también es magnitud vectorial. El vector de velocidad tiene la misma dirección que el de desplazamiento:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Si conocemos la velocidad $\vec{v}$, el desplazamiento $\vec{s}$ durante el tiempo t se expresa con la igualdad

$$\vec{s} = \vec{v}t. \qquad (2)$$

[1] Con mayor precisión se denomina velocidad del movimiento rectilíneo uniforme el vector dirigido del mismo modo que el desplazamiento del cuerpo y cuyo módulo es igual a la razón de los valores numéricos del desplazamiento y el intervalo de tiempo durante el cual se realizó dicho desplazamiento. Sin embargo, por regla, se hace uso de la definición más corta, aunque menos precisa, ofrecida más arriba.

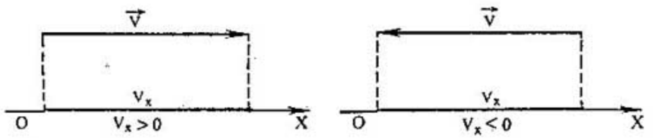


Fig. 22 a) b)

Con las fórmulas en forma vectorial no se pueden realizar cálculos, ya que la magnitud vectorial, además de valor numérico, tiene determinada dirección. Al efectuar cálculos se emplean fórmulas en las que figuran no vectores, sino sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas, ya que con éstas pueden ejecutarse operaciones algebraicas.

Para el movimiento rectilíneo la trayectoria es una línea recta. Por esta causa, es lógico dirigir el eje de coordenadas a lo largo de dicha recta. En tal caso, durante el movimiento del cuerpo sólo variará una coordenada, por ejemplo, la x, si el eje elegido se designa con X. A lo largo de este eje estarán dirigidos tanto el vector de velocidad, como el de desplazamiento del cuerpo.

PROYECCIONES DEL DESPLAZAMIENTO Y DE LA VELOCIDAD. Ya que los vectores $\vec{s}$ y $\vec{v}t$ son iguales, sus proyecciones sobre el eje X también serán iguales, o sea,

$$s_x = v_x t.$$

Ahora ya podemos obtener la fórmula para calcular la coordenada x del punto en cualquier momento de tiempo. Sabemos (véase 1.5), que

$$x = x_0 + s_x,$$

de forma que

$$\underline{x = x_0 + v_x t.} \qquad (3)$$

La fórmula (3) muestra cómo depende del tiempo la coordenada del punto, lo que quiere decir que con su ayuda es posible describir el movimiento rectilíneo uniforme; para ello hemos introducido dos magnitudes cinemáticas, es decir, los vectores de desplazamiento y de velocidad (la magnitud $x - x_0$ es, precisamente, la proyección del vector de desplazamiento sobre el eje X).

Como sigue de la fórmula (3), para hallar la posición del cuerpo (punto material) en cualquier intervalo de tiempo, durante el movimiento rectilíneo uniforme, hay que conocer la coordenada inicial del cuerpo (punto) x_0 y la proyección del vector de velocidad sobre el eje, a lo largo del cual se mueve el cuerpo.

Hay que recordar que en la mencionada fórmula v_x es la proyección del vector de velocidad, por lo que, como toda proyección de un vector, puede ser positiva y negativa (fig. 22).

La fórmula (3) permite hallar el sentido de la magnitud "velocidad". En efecto, de ella se deduce que

$$v_x = \frac{x - x_0}{t},$$

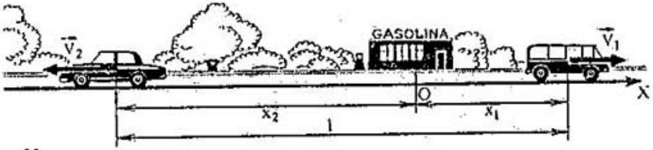


Fig. 23

o sea, podemos decir que la velocidad es la rapidez de variación de la coordenada de un cuerpo en movimiento.

Remarquemos una vez más que para la resolución de los problemas de mecánica, hay que conocer el VECTOR de velocidad y no sólo su módulo. Los velocímetros instalados en los automóviles, muestran precisamente, el módulo de la velocidad. A este instrumento le es "indiferente" en qué dirección se mueve el automóvil. Por esta causa, según sus indicaciones no se puede definir ni la dirección del movimiento del automóvil, ni su posición en cualquier momento de tiempo.

PROBLEMA 1. Dos automóviles se desplazan al encuentro por una carretera: uno de ellos a una velocidad de 60 km/h y el otro, a 90 km/h. En una gasolinera los autos se juntaron y después de esto continuaron su camino. Determinar la posición de cada automóvil 30 minutos después del encuentro y la distancia entre ellos en ese momento (fig. 23).

Solución. Como origen de coordenadas tomamos la gasolinera, mientras que el instante en que los automóviles se encontraron, como origen de registro del tiempo. El eje de coordenadas (designado por la letra X) lo dirigimos de izquierda a derecha. Entonces, las coordenadas de los automóviles, 0,5 h después de su encuentro, se pueden calcular por las fórmulas:

$$x_1 = x_{01} + v_{1x}t \text{ y } x_2 = x_{02} + v_{2x}t.$$

Las coordenadas iniciales x_{01} y x_{02} de los dos autos son nulas. Por lo tanto

$$x_1 = v_{1x}t \text{ y } x_2 = v_{2x}t.$$

La proyección v_{1x} de la velocidad del primer automóvil es positiva, ya que el vector de su velocidad está dirigido lo mismo que el eje X, e igual a $+60$ km/h. La proyección v_{2x} del segundo auto es negativa a causa de que el vector de su velocidad está dirigido en sentido inverso a la dirección positiva del eje X, de forma que $v_{2x} = -90$ km/h.

Así pues,

$$x_1 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 0{,}5 \text{ h} = 30 \text{ km},$$

$$x_2 = 90\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 0{,}5 \text{ h} = 45 \text{ km}.$$

La distancia l entre los automóviles es igual a la diferencia de sus coordenadas:

$$l = x_1 - x_2 = 30 \text{ km} - (-45 \text{ km}) = 75 \text{ km}.$$

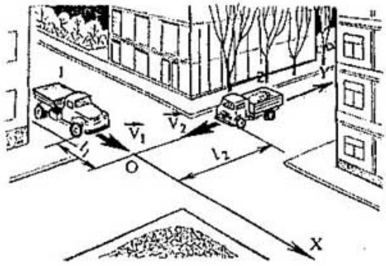


Fig. 24

PROBLEMA 2. Dos automóviles se desplazan por calles perpendiculares entre sí en dirección al cruce de ellas. En cierto momento de tiempo, el primer auto, que se mueve a una velocidad $v_1 = 20$ km/h, se encuentra a una distancia $l_1 = 200$ m del cruce. En ese mismo momento, el segundo automóvil se halla a una distancia $l_2 = 300$ m del cruce. ¿A qué velocidad v_2 se mueve el segundo auto, si los dos automóviles llegan al cruce al mismo tiempo?

Solución. Como origen de coordenadas tomamos el cruce de las calles, dirigimos los ejes de coordenadas a lo largo de éstas (fig. 24). Comenzamos a contar el tiempo en el momento en que los autos se encontraban a las distancias l_1 y l_2 del cruce. El primer auto se mueve a lo largo del eje X, el segundo en sentido contrario a la dirección del eje Y. Por esta razón, durante el movimiento del primer automóvil, sólo varía su coordenada x:

$$x = x_0 + v_{1x}t,$$

mientras que al moverse el segundo auto sólo varía su coordenada y:

$$y = y_0 + v_{2y}t.$$

Del planteamiento del problema y del sistema de referencia elegido se desprende que $x_0 = -l_1$; $y_0 = l_2$; $v_{1x} = v_1$; $v_{2y} = -v_2$. En el instante $t = t_0$, que corresponde al encuentro de los automóviles, sus coordenadas son iguales a cero. Por lo tanto:

$$0 = -l_1 + v_1 t_0, \quad 0 = l_2 - v_2 t_0.$$

De la primera ecuación determinamos que $t_0 = l_1/v_1$ y lo ponemos en la segunda ecuación.

Obtenemos:

$$0 = l_2 - v_2 \frac{l_1}{v_1},$$

de donde

$$v_2 = \frac{l_2}{l_1} v_1; \quad v_2 = \frac{0{,}3 \text{ km}}{0{,}2 \text{ km}} \cdot 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

¿ ?

1. ¿Debemos o no considerar vectorial la magnitud l calculada en el problema 1?
2. ¿En qué difieren el desplazamiento y el camino recorrido durante el movimiento rectilíneo?
3. ¿En qué se distinguen las magnitudes determinadas por las expresiones $v = s/t$ y $\vec{v} = \vec{s}/t$ y qué tienen de común?
4. Conociendo la posición inicial del cuerpo y la longitud del camino recorrido ¿podemos hallar la posición final del cuerpo?
5. ¿Qué relación hay entre la velocidad del cuerpo y la variación de su posición en el espacio?

Ejercicios 2

1. Un grupo de turistas, avanzando a velocidad constante con el módulo 5 km/h, se dirige, primeramente, hacia el Norte durante 1 hora, después 0,5 h marcha hacia el Oriente (bajo un ángulo de 90° respecto de la dirección hacia el Norte) y, por fin, 1 h 30 min hacia el Sur (bajo un ángulo de 180°). ¿Dónde se encontrará el grupo después de pasar los tres sectores? ¿Cuánto tiempo necesitará el grupo para retornar al punto inicial por una recta?
2. Un automovilista a una velocidad de 30 km/h ha recorrido la mitad del camino hasta el lugar de destino en el transcurso de 2 h. ¿A qué velocidad debe continuar su movimiento para que durante ese mismo intervalo de tiempo llegar a donde iba y volver atrás?
3. Un viajero sorprendido por una tormenta vio un relámpago y después de 10 s llegó hasta él el sonar del trueno. ¿A qué distancia se produjo el primero, si la velocidad del sonido por el aire es igual a 340 m/s?

1.7. Representación gráfica del movimiento

GRÁFICA DE MOVIMIENTO. Para mayor evidencia, el movimiento se puede describir con ayuda de GRÁFICAS. Si por el eje horizontal (eje de abscisas) en determinada escala se traza el tiempo pasado desde que comenzamos a contarlo, mientras que por el eje vertical (eje de ordenadas), también en la escala correspondiente, los valores de la coordenada del cuerpo, la gráfica que obtendremos expresará la dependencia entre dicha coordenada y el tiempo (también se denomina GRÁFICA DE MOVIMIENTO).

Supongamos que un cuerpo está en movimiento uniforme a lo largo del eje X (fig. 25). Esto significa que sólo varía su coordenada x. En los momentos de tiempo $t = 0$, $t_1 = 10$ s, $t_2 = 20$ s, $t_3 = 30$ s, etc., el cuerpo se encuentra, respectivamente, en los puntos con las coordenadas: $x_0 = 3$ m (punto A), $x_1 = 4$ m, $x_2 = 5$ m, etc.

Con el fin de construir la gráfica de movimiento del cuerpo, trazaremos los valores de x por el eje vertical y por el horizontal, los valores del tiempo t. La gráfica de este movimiento es la *línea recta* mostrada en la fig. 26. Esto quiere decir, que la coordenada depende del tiempo de *modo lineal.*

La gráfica de dependencia entre las coordenadas del cuerpo y el tiempo (véase la fig. 26), no se debe confundir con la trayectoria del movimiento del cuerpo, es decir, con la recta por todos los puntos de la cual ha pasado el cuerpo durante su movimiento (véase la fig. 25).

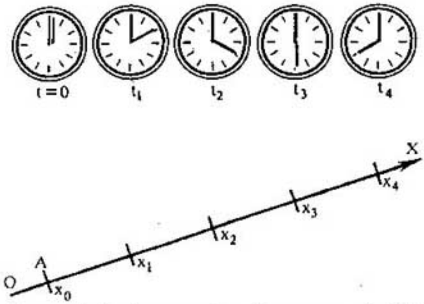


Fig. 25

Las gráficas de movimiento, cuando el cuerpo efectúa movimiento rectilíneo, ofrecen la solución completa del problema de mecánica, ya que aquéllas permiten hallar la posición del cuerpo en cualquier momento de tiempo, incluidos también los momentos que preceden al inicial (si se supone que antes de llegar al punto donde empezamos a contar el tiempo, el cuerpo se movía a la misma velocidad). Continuando la gráfica, representada en la fig. 26, en el sentido inverso a la dirección positiva del eje de tiempo, podemos, por ejemplo, hallar que el cuerpo, 30 s antes de que llegara al punto *A*, se encontraba en el origen de referencia de la coordenada ($x = 0$).

Por el aspecto de las gráficas de dependencia entre la coordenada y el tiempo, se puede juzgar también sobre la velocidad de movimiento. Está claro que cuanto mayor sea la velocidad, más abrupta será la gráfica, es decir, tanto mayor será el ángulo entre ella y el eje de tiempo (cuanto mayor sea dicho ángulo, tanto más grande será la variación de la coordenada en iguales intervalos de tiempo).

En la fig. 27 se muestran varias gráficas de movimiento a diversas velocidades. Las gráficas *1*, *2* y *3* muestran que los cuerpos se mueven a lo largo del eje *X* en sentido positivo. El cuerpo cuya gráfica de movimiento es la línea *4*, se mueve en dirección inversa a la del eje *X*. En las gráficas de movimiento se puede hallar el desplazamiento del cuerpo en movimiento durante cualquier intervalo de tiempo.

Por ejemplo, en la fig. 27 vemos que el cuerpo *3* durante el tiempo entre 1 y 5 s ha realizado un desplazamiento de 2 m según el modulo en la dirección positiva, en tanto que el cuerpo *4*, en el transcurso de ese mismo tiempo ha ejecutado un desplazamiento igual a 4 m según el módulo, en sentido negativo.

GRÁFICA DE VELOCIDAD. Junto con las gráficas de movimiento, se hace con frecuencia uso de las GRÁFICAS DE VELOCIDAD. Se confeccionan trazando en el eje de ordenadas la proyección de las velocidades del cuerpo y por el eje de abscisas, como antes, el tiempo. Semejantes gráficas muestran cómo varía la velocidad con el tiempo, es decir, cómo depende la primera del segundo. En caso de movimiento rectilíneo uniforme esta "dependencia" consiste en que con el correr del tiempo la velocidad no varía, por lo que la gráfica de la velocidad es una recta paralela al eje de tiempo (fig. 28). La gráfica *I* en dicha figura se refiere al caso cuando el cuerpo se mueve en el sentido

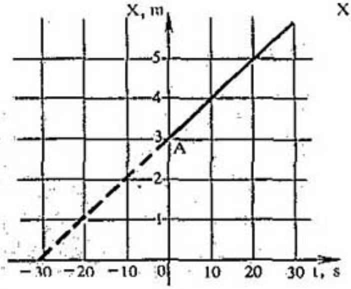


Fig. 26

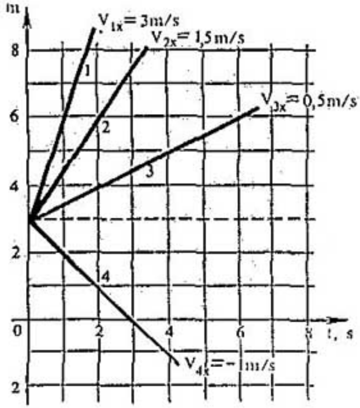


Fig. 27

positivo del eje X. La gráfica *II*, al caso cuando el cuerpo se mueve en dirección contraria (la proyección de la velocidad es negativa).

También podemos determinar en la gráfica de velocidad el valor absoluto del desplazamiento del cuerpo durante el intervalo dado de tiempo. Numéricamente es igual al área del rectángulo sombreado (fig. 29): la superior, si el cuerpo se mueve en la dirección positiva y la inferior, en caso contrario. En efecto, el área del rectángulo es igual al producto de sus dos lados vecinos. Uno de los lados, en determinada escala, es igual al tiempo t, el otro, a la proyección de la velocidad $\vec{v}$. Su producto vt es, precisamente, igual al valor absoluto del desplazamiento del cuerpo.

PROBLEMA. En la fig. 30 están representadas las gráficas de movimiento de un automóvil y un ciclista (fig. 31). Empleando las gráficas, hallar el lugar y el tiempo de su encuentro.

Solución. Analizando la gráfica *I*, podemos decir que el automóvil está en

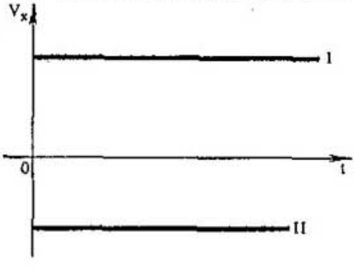


Fig. 28

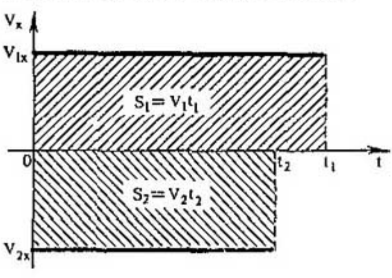


Fig. 29

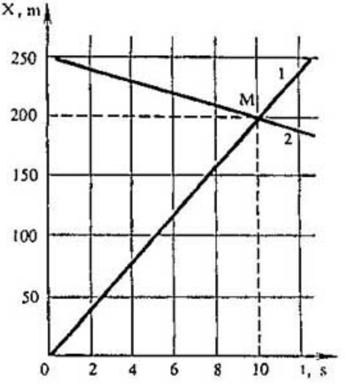


Fig. 30

movimiento uniforme a lo largo del eje X a una velocidad de 20 m/s, en tanto que del análisis de la gráfica *2*, se desprende que el ciclista se mueve a su encuentro, también uniformemente, pero a una velocidad de 5 m/s. En la fig. 30 vemos asimismo que en el momento inicial de tiempo, el automóvil y el ciclista distaban 250 m uno del otro. Las gráficas se cruzan en el punto M, lo que significa que el automóvil y el ciclista se encontraron. El encuentro se produjo después de 10 s desde que comenzamos a contar el tiempo, a una distancia de 200 m de la posición inicial del automóvil.

¿ ?

1. ¿A qué movimiento corresponde la gráfica representada por una linea de trazos en la fig. 27?
2. ¿A qué movimientos corresponden las gráficas *I* y *II* (véase la fig. 28)?
3. ¿Cómo hallar en la gráfica de velocidad el módulo del desplazamiento?

Ejercicios 3

1. Haciendo uso de las gráficas (véase la fig. 27) hallar la distancia entre los cuerpos *2* y *4* en el momento de tiempo $t = 3$ s.
2. Según la gráfica en la fig. 28 determinar el módulo y la dirección de la velocidad del cuerpo.

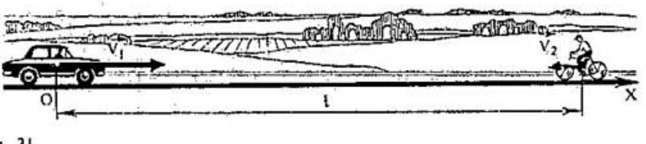


Fig. 31

1.8. Relatividad del movimiento: las direcciones del movimiento de un sistema móvil de referencia y del cuerpo son paralelas entre sí

Como hemos visto en 1.2, la posición de un cuerpo (punto) en el espacio siempre se prefija respecto de cualquiera otro, elegido como cuerpo de referencia. Con este fin, por éste se trazan los ejes de coordenadas. Se dice que con dicho cuerpo *está enlazado* el sistema de coordenadas.

Pero como cuerpo de referencia podemos tomar cualquier cuerpo y con cada uno de ellos *enlazar* nuestro sistema de coordenadas. En tal caso, la posición de un mismo cuerpo puede ser considerada simultáneamente en distintos sistemas de coordenadas. Queda claro, que en lo que atañe a diversos cuerpos de referencia en diferentes sistemas de coordenadas, un mismo cuerpo puede tener coordenadas distintas en absoluto. Por ejemplo, podríamos determinar la posición del automóvil en la carretera indicando que se encuentra a una distancia l_1 al Norte del poblado A (fig. 32). Pero, al mismo tiempo, es posible decir que el automóvil se halla a una distancia l_2 al Este del punto B. Esto significa, que *la posición del cuerpo es relativa: es distinta respecto de diversos cuerpos de referencia y de diferentes sistemas de coordenadas enlazados con ellos.*

Pero no sólo es relativa la posición del cuerpo, sino que también *es relativo su movimiento.* ¿En qué consiste la relatividad del movimiento?

Un niño que por primera vez vio desde la orilla de un río el movimiento de los hielos por éste, preguntó: ¿En qué viajamos? Por lo visto, el niño "eligió" como cuerpo de referencia un témpano de hielo que flota en el río. Estando en reposo en relación con el sistema de referencia, ligado con la orilla, el niño se movía junto con ésta en relación con el sistema de referencia "elegido" por él, o sea, el témpano de hielo.

En la práctica, hay que considerar con frecuencia el movimiento de un mismo cuerpo en relación con diferentes cuerpos de referencia, que *se mueven unos respecto de otros.* Así, para el artillero es importante saber cómo se mueve el obús no sólo respecto a la Tierra, sobre la cual su cañón se encuentra en reposo, sino que asimismo respecto del carro de combate contra el que dispara y que está en movimiento en relación con la misma; al piloto le interesa el

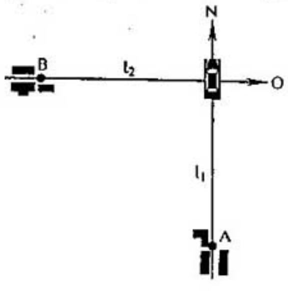


Fig. 32

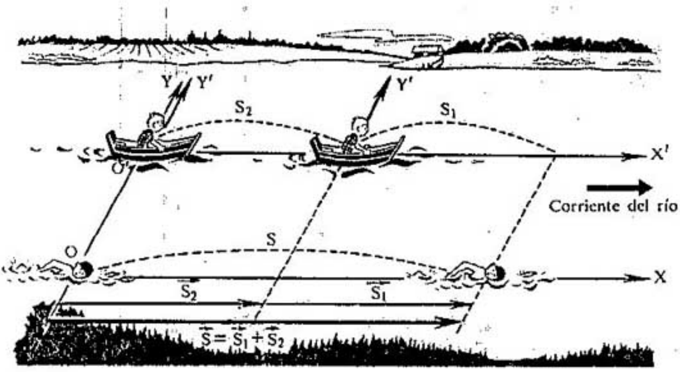


Fig. 33

movimiento del avión tanto respecto de la Tierra, como del aire, que a su vez se desplaza, etc.

MOVIMIENTO DESDE DISTINTOS PUNTOS DE VISTA. Estudiemos el movimiento de un mismo cuerpo en relación con dos cuerpos de referencia, los cuales a su vez se mueven uno con respecto de otro. Para simplificar, supongamos que uno de los cuerpos de referencia está inmóvil, mientras que el segundo avanza, con relación al primero, en movimiento rectilíneo uniforme.

He aquí un sencillo ejemplo. Un hombre nada río abajo a cierta velocidad, que él mantiene trabajando constantemente con los brazos y las piernas[1]. Esta velocidad la conserva nadando en sentido de la corriente, en sentido contrario a ésta y en el agua inmóvil (con igual tensión muscular). Tomemos la orilla como cuerpo inmóvil de referencia y el agua, como móvil.

¿Cómo se mueve el nadador en relación con la orilla y el agua? Vamos a imaginarnos que el movimiento de aquél es observado por dos observadores: uno en la orilla, el segundo en una barca que sin remador navega río abajo. En lo que atañe al agua, la barca está en reposo, pero respecto a la orilla, está en movimiento rectilíneo uniforme, a la misma velocidad que la propia agua.

Mentalmente tracemos por el punto O en la orilla, donde se encuentra el observador, los ejes de coordenadas X e Y, con la particularidad de que dirigimos el eje X a lo largo de la corriente del río, mientras que el eje Y, perpendicular al primero (fig. 33). Con la barca (el agua) también enlazamos el sistema de coordenadas $X'O'Y'$, cuyos ejes X' e Y' son paralelos a los ejes X e Y.

Hallemos el desplazamiento del nadador en relación con estos dos sistemas de referencia en el transcurso de un mismo intervalo de tiempo t.

El observador en la barca después de pasar el tiempo t notará que el nadador, respecto de él, ha efectuado el desplazamiento $\vec{s}_1$. Después de dividir éste

[1] Si la persona no trabajase con brazos y piernas, ella yacería en el agua y respecto de ésta estaría inmóvil.

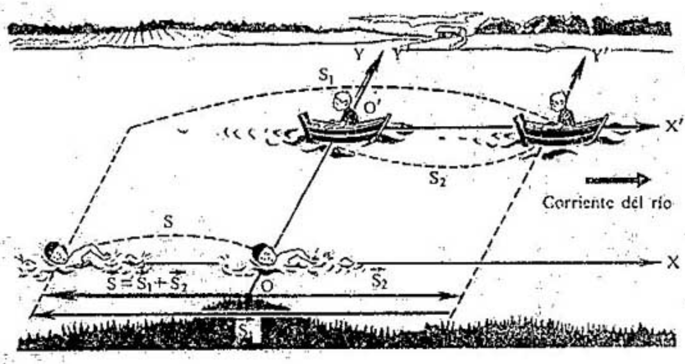


Fig. 34

por el tiempo, hallará la velocidad del nadador $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{s}_1}{t}$$

($\vec{v}_1$ es la velocidad del nadador en lo que concierne al agua (barca), es decir, en el sistema de coordenadas en movimiento $X'O'Y'$).

En la orilla, el observador admitirá que durante el tiempo t el desplazamiento del nadador es igual a $\vec{s}$, mientras que la barca realizó el desplazamiento $\vec{s}_2$ respecto de la orilla. De la fig. 33 se desprende que el desplazamiento del nadador $\vec{s}$ con relación a la orilla, es decir, en el sistema de coordenadas XOY, es igual a la suma de los dos desplazamientos:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2.$$

FÓRMULA DE COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES. Dividiendo $\vec{s}$ por t, el observador en la orilla define la velocidad $\vec{v}$ del nadador respecto de aquélla:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t} = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{t} = \frac{\vec{s}_1}{t} + \frac{\vec{s}_2}{t}.$$

El primer sumando $\vec{s}_1/t$ es la velocidad del nadador en relación con el sistema inmóvil de coordenadas (el agua o la barca). El sumando $\vec{s}_2/t$ será, por lo visto, la velocidad de la barca (el agua) respecto del sistema inmóvil de coordenadas (la orilla). Designémosla por $\vec{v}_2$. Por lo tanto, $\vec{v}_2$ es *la velocidad del sistema móvil de coordenadas en relación con el que está en reposo.*

De aquí sigue, que

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \qquad (1)$$

Esta expresión recibe el nombre de FÓRMULA DE COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES.

Una fórmula exactamente igual hubiéramos hallado si el nadador se

3—942

desplazara contra corriente (fig. 34).

La velocidad de movimiento de un cuerpo respecto a un sistema inmóvil de coordenadas, es igual a la suma geométrica de dos velocidades: la del cuerpo en relación con un sistema móvil de coordenadas y la de éste respecto del sistema inmóvil de coordenadas.

Como vemos, las velocidades del cuerpo, en lo que atañe a distintos sistemas de referencia, en movimiento unos respecto de otros, son diferentes. En esto se manifiesta la relatividad del movimiento.

En el ejemplo que hemos estudiado, el cuerpo en movimiento (nadador) y el sistema móvil de coordenadas (barca y agua) se mueven a lo largo de una recta, es decir, del eje X. Por esto, en lugar de los vectores $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, podemos hacer uso de sus proyecciones sobre el eje X. Entonces la fórmula de composición de velocidades se convertirá en:

$$v_x = v_{1x} + v_{2x}. \qquad (2)$$

En esta fórmula, las magnitudes v_x, v_{1x} y v_{2x} pueden ser tanto positivas como negativas, en función de la dirección de los vectores $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en relación con el eje X.

Puede suceder que un cuerpo, que en un sistema de coordenadas está en movimiento, queda en reposo en otro. Si el nadador a que nos hemos referido dejara de trabajar con las piernas y los brazos y simplemente yaciera en el agua, respecto de la barca estaría en reposo, mientras que en relación con la orilla se movería a la misma velocidad que la corriente del río. Y a la inversa, si el nadador se desplazara contra corriente, cuya velocidad fuese igual a la de aquél, el mismo se encontraría en reposo con relación a la orilla. En lo que al agua atañe, él se movería a una velocidad $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Por lo tanto, no sólo el movimiento es relativo, sino que también el reposo. Si un cuerpo está en reposo en relación con cierto sistema de coordenadas, siempre podremos encontrar tales sistemas de coordenadas respecto de los cuales aquél estará en movimiento.

Esto quiere decir que no hay cuerpos en reposo absoluto. El movimiento es inherente a todos los cuerpos y, en general, a todo aquello que existe en la naturaleza, o sea, a todo el mundo material.

1.9. Relatividad del movimiento: las direcciones del movimiento de un sistema móvil de referencia y del cuerpo son perpendiculares entre sí

La velocidad de movimiento del cuerpo y la del sistema móvil de coordenadas no siempre están dirigidas a lo largo de una misma recta, como ocurrió en el ejemplo considerado en el parágrafo anterior. Resolvamos los siguientes problemas.

PROBLEMA 1. Un nadador tiene que cruzar un río, con la particularidad de que debe moverse siempre perpendicularmente a la corriente, es decir, al eje X (fig. 35). ¿Cuál será el movimiento del nadador desde el punto de vista de un observador en una barca (respecto del sistema móvil de coordenadas $X'O'Y'$) y cuál será para un observador en la orilla (en la sistema de coordenadas en reposo XOY)? El movimiento del nadador debe considerarse uniforme.

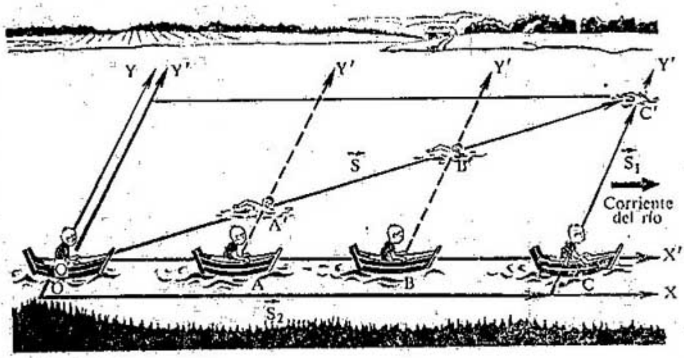


Fig. 35

Solución. El observador en la barca ve que el nadador todo el tiempo se aleja de él desplazándose a lo largo del eje Y'. Él ve esto tanto hallándose [illegible] el punto A, como en el punto B o bien en cualquier otro punto. [illegible] de tiempo t, cuando la barca se encuentre en el punto C, el [illegible] en la orilla opuesta, en el punto C', habiendo realizado el desplazamiento $\vec{s}_1 = \overline{CC'}$ (véase la fig. 35). Dividiendo el desplazamiento $\vec{s}_1$ por el [illegible] t, el observador en la barca obtiene la velocidad $\vec{v}_1$ del nadador [illegible] el sistema móvil de coordenadas $X'O'Y$:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{s}_1}{t}.$$

Dicha velocidad está dirigida a lo largo del eje Y'.

De una forma diferente por completo verá el movimiento del nadador, que cruza el río, el observador que se encuentra en la orilla. Desde el punto de vista de este observador también se desplazará el eje Y'. En "su" sistema de coordenadas el desplazamiento del nadador en el transcurso de ese mismo intervalo de tiempo t estará representado por el segmento dirigido $\overline{O'C'} = \vec{s}$, mientras que el desplazamiento de la barca, por el segmento $\overline{OC} = \vec{s}_2$, (véase la fig. 35). El nadador ha sido arrastrado río abajo. En la fig. 35 vemos que el desplazamiento $\vec{s}$ es igual a la suma geométrica del desplazamiento del nadador $\vec{s}_1$ respecto del sistema móvil de coordenadas $X'O'Y'$ y el desplazamiento $\vec{s}_2$ del propio sistema de coordenadas $X'O'Y'$ con relación al sistema inmóvil XOY. Por consiguiente, aquí, lo mismo que en el ejemplo considerado en el parágrafo anterior,

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2.$$

La velocidad del nadador $\vec{v}$ en relación con el sistema XOY será:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t} = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{t} = \frac{\vec{s}_1}{t} + \frac{\vec{s}_2}{t},$$

3*

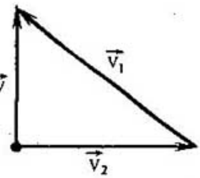


Fig. 36

es decir,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 . \tag{1}$$

En el problema, que hemos examinado, no sólo la velocidad de movimiento, sino que incluso la trayectoria del nadador son distintas en diferentes sistemas de coordenadas. Si en lo que afecta al observador en la barca la trayectoria de movimiento del nadador es una *recta perpendicular a la corriente del río*, para el observador en la orilla, dicha trayectoria es *una recta inclinada, formando cierto ángulo (que difiere de 90°) a la dirección de la corriente.* Ésto también manifiesta la relatividad del movimiento: en distintos sistemas de coordenadas, que se desplazan uno respecto de otro, las trayectorias de movimiento son diferentes.

PROBLEMA 2. Un nadador cruza un río en dirección perpendicular a la orilla (¡no a la corriente!). La velocidad de la corriente es de 2 km/h, la anchura del río, 100 m. ¿A qué velocidad se desplaza el nadador en relación con el agua, si tarda 4 min en cruzar el rio?

Solución. Sabemos que la velocidad del nadador $\vec{v}$ respecto de la orilla (sistema inmóvil de referencia) es igual a la suma vectorial de la velocidad $\vec{v}_1$ del nadador respecto del agua (sistema móvil) y la velocidad de la corriente del río $\vec{v}_2$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 .$$

Construyendo el triángulo vectorial (fig. 36) obtenemos la velocidad buscada $\vec{v}_1$.

De la figura se desprende que

$$v_1^2 = v_2^2 + v^2.$$

Por lo tanto,

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 + v^2}.$$

El módulo del vector $\vec{v}$

$$v = \frac{100}{4}\ \text{m/min} = 25\ \text{m/min} = 1{,}5\ \text{km/h}.$$

Por esta razón

$$v_1 = \sqrt{\left(1{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 + \left(2\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 2{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

CORRECCIÓN IMPORTANTE EN PRINCIPIO: PERO NO SIEMPRE NECESARIA. En el problema 1 que acabamos de examinar, los dos observadores, en la barca y la orilla, miden el tiempo entre la "línea de salida" y la "meta" del nadador. Con ello, consideramos que ambos obtienen un mismo resultado. Esto quiere decir, que se supone que el tiempo entre los dos acontecimientos – la "partida" y la "meta" – no varía al pasar del sistema de referencia inmóvil al móvil. En realidad la cosa no es así. La teoría de la relatividad de A. Einstein que, como ahora es conocido, describe con mayor precisión el movimiento, se basa en que el tiempo entre dos acontecimientos, medido por un observador en movimiento, es mayor que el tiempo entre esos dos acontecimientos medido por un observador en reposo: el movimiento conduce a la retardación (dilatación) del transcurso del tiempo. Por esta causa, la fórmula de composición de velocidades, adquiere otro aspecto. Pero dicha retardación puede ser observada a velocidades próximas a $3 \cdot 10^8$ m/s, que según la teoría de la relatividad es la velocidad límite e inalcanzable para el movimiento de los cuerpos. En el mundo que nos rodea, los cuerpos se mueven a velocidades mucho menores que $3 \cdot 10^8$ m/s. Por esta razón la fórmula (1) es válida.

¿ ?

1. ¿En qué consiste la relatividad del movimiento?
2. ¿Cómo se mueven el agua y la orilla respecto del nadador en el ejemplo donde figura éste?
3. Una cosechadora que recolecta el trigo en un campo se desplaza en relación con la Tierra a una velocidad de 2,5 km/h y sin pararse, descarga el grano en un camión. ¿Respecto de qué cuerpo de referencia el camión está en movimiento y en relación con cuál, está en reposo?
4. Un remolcador empuja una barcaza por un río. ¿Con relación a qué cuerpos de referencia la barcaza está en movimiento? ¿Respecto de qué cuerpo de referencia se encuentra en reposo?

Ejercicios 4

1. El motor de un avión comunica a éste una velocidad con relación al aire igual a 900 km/h. ¿A qué velocidad se mueve el avión respecto de la Tierra con viento de cola, cuya velocidad es de 50 km/h; en caso de ese mismo viento al encuentro?
2. Por dos carreteras perpendiculares entre sí están en movimiento uniforme un camión y un coche de turismo a velocidades de 54 y 72 km/h, respectivamente. ¿A qué distancia uno de otro se encontrarán los automóviles después de 10 minutos de haberse encontrado en el cruce de las carreteras?
3. ¿Ayuda u obstaculiza la corriente a cruzar el río? ¿Ayuda u obstaculiza la corriente a cruzar el río por el camino más corto?
4. Un avión que salió de Moscú mantiene su rumbo hacia el Norte con ayuda de la brújula, vuela a una altura de 8 km y a una velocidad de 720 km/h. ¿Cuáles serán las coordenadas del avión respecto del aeródromo dos horas después de comenzar el vuelo, si durante éste hay viento occidental de una velocidad de 10 m/s?

1.10. Unidades de medición de la longitud y el tiempo. Noción sobre el sistema de unidades

De todo lo que hasta ahora hemos dicho acerca del movimiento queda claro que al estudiarlo es necesario definir, por lo menos, dos magnitudes: el desplazamiento y el tiempo.

Tanto la longitud del desplazamiento, como los intervalos de tiempo se expresan mediante ciertos números, que se obtienen como resultado de mediciones.

Medir una magnitud significa compararla por medio de algún procedimiento con una magnitud homogénea que convencionalmente se ha adoptado como unidad de medición.

Por ejemplo, podemos medir la longitud del pasillo de la escuela comparándola con la largura de un paso. Contando cuántos pasos corresponden a la longitud del pasillo, sabremos cuántas veces ésta es mayor que la largura de un paso. Este número (cuántas veces) expresa, precisamente, la longitud del pasillo en pasos.

Así pues, ante todo hay que elegir la unidad para la magnitud que medimos. Aquélla puede ser elegida del modo más arbitrario. Por ejemplo, para medir la longitud, en diferentes tiempos y países, fueron utilizadas las más diversas unidades. Como unidad de longitud se utilizaron la largura del paso, de la planta del pie del hombre, la distancia desde el codo hasta el extremo del dedo medio, así como la distancia que un peatón cubría en el transcurso de un día, etc. Cuando en la comedia de A.S. Griboyédov[1] "¡Qué desgracia el ingenio!", leemos:

> Con rigor prohibiría a estos caballeros
> A tiro aproximarse a las capitales,

comprendemos que el protagonista de la comedia, Fámusov, toma como unidad de longitud la distancia que vuela un obús disparado del cañón, unidad que con placer usaban los militares en antiguos tiempos.

En la actualidad, para todos los países se ha adoptado la unidad universal de longitud – el METRO (m).

Un metro es la distancia entre dos rayas paralelas trazadas sobre una barra de forma especial, fabricada de una aleación de platino e iridio.

Este PATRÓN DE LONGITUD se conserva en la Oficina Internacional de pesas y medidas en Francia. En otros países hay copias exactas de este patrón. De acuerdo con él se establece la longitud de múltiples reglas-metros, con las que corrientemente se mide la longitud.

Además de la unidad básica de longitud – el metro – se usan extensamente las unidades que son 10, 100, 1000 y más veces mayores o menores que el metro (KILÓMETRO, CENTÍMETRO, MILÍMETRO, MICRÓMETRO).

La unidad de tiempo se puede elegir al azar. Claro está, que no se puede fabricar un patrón del tiempo en forma de algún objeto, algo similar a la regla-metro. *Como patrón de tiempo debe servir la duración de cierto proceso que se*

---

[1] A.S. Griboyédov (1775–1829), famoso escritor ruso (*N. del T.*)

repite con uniformidad. Hoy día, tal proceso se considera el movimiento de la Tierra alrededor del Sol: nuestro planeta da una vuelta en el transcurso de un año. Pero como unidad de tiempo no se toma el año, sino que determinada parte de este intervalo de tiempo, es decir, un SEGUNDO (s): 1 año = 31 556 925,9747 s (para cálculos muy aproximados podemos considerar que 1 año = $\pi \cdot 10^7$ s).

En la vida cotidiana y en la técnica se usan con frecuencia otras unidades de tiempo: el MINUTO (min) y la HORA (h): 1 min = 60 s y 1 h = 3600 s.

Además de la longitud y el tiempo, también hemos tropezado con otra unidad más – la velocidad. ¿Habrá que elegir para ella una unidad especial?

Resulta que esto no es necesario, ya que, como sabemos, la velocidad está enlazada con la longitud y el tiempo mediante la siguiente fórmula

$$v = \frac{s}{t}.$$

En esta fórmula vemos que si durante 1 s cierto cuerpo realiza un desplazamiento igual a 1 m, la velocidad del cuerpo será igual a la unidad (1 m/s). La velocidad de semejante movimiento es precisamente la que se puede tomar como unidad de velocidad.

En calidad de unidad de velocidad se adopta esta magnitud para un movimiento rectilíneo uniforme tal que el cuerpo se desplaza 1 m *en el transcurso de* 1 s.

Por ejemplo, tampoco se elige una unidad especial al medir el volumen, ya que éste se encuentra ligado con la longitud y se puede medir en metros cúbicos. ¿En qué casos hay que elegir unidades especiales de medición y en cuáles, no?

Entre las magnitudes físicas hay determinadas dependencias, por lo que todos los fenómenos de la naturaleza están enlazados entre sí de una u otra forma. El enlace entre las magnitudes se expresa recurriendo a fórmulas matemáticas. Estas mismas, también ligarán entre sí las unidades de medición de las magnitudes físicas. Por eso, las unidades de medición de unas magnitudes pueden expresarse mediante las unidades de medición de otras.

Puede ser tomado un pequeño número de magnitudes (llamadas BÁSICAS) y al azar establecer para ellas las unidades de medición. En cuanto a las unidades para todas las demás magnitudes (llamadas DERIVADAS), éstas pueden ser establecidas basándose en las fórmulas matemáticas que las enlazan con las magnitudes básicas.

El conjunto de las unidades para todas las magnitudes físicas, establecidas del modo indicado, recibe el nombre de SISTEMA DE UNIDADES.

Éstos pueden ser diferentes. Tanto dependen de qué magnitudes físicas se han tomado en calidad de básicas, como de la elección de las unidades de medición de estas últimas.

En la actualidad, se ha adoptado el SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (abreviado SI – Sistema Internacional). Se estructura sobre la base de siete magnitudes básicas, entre las cuales hallamos la longitud y el tiempo. En el SI la unidad de longitud es el metro y la de tiempo, el segundo. Con el resto de las magnitudes básicas del SI y sus unidades de medición nos familiarizaremos más adelante. Sin duda alguna, la unidad de velocidad que aducimos más arriba (1 m/s) se refiere al SI.

Lo más importante en el primer capítulo

El fenómeno del movimiento mecánico de los cuerpos (puntos materiales) consiste en que la posición de un cuerpo respecto de otros, es decir, sus coordenadas, varían con el correr del tiempo.

Para hallar las coordenadas del cuerpo en cualquier momento de tiempo, hay que conocer las coordenadas iniciales y el vector de desplazamiento de dicho cuerpo. La variación de las coordenadas del cuerpo es igual a la proyección del vector de desplazamiento sobre el correspondiente eje de coordenadas.

El tipo más sencillo de movimiento es el rectilíneo uniforme. Cuando el movimiento es de este tipo, sólo es preciso determinar una coordenada, ya que el eje de coordenadas puede ser dirigido a lo largo del sentido del movimiento del cuerpo. La coordenada x del cuerpo (punto material) en todo momento de tiempo t puede ser calculada por la fórmula

$$x = x_0 + v_x t,$$

donde x_0 es la coordenada inicial del cuerpo; v_x, la proyección del vector de su velocidad sobre el eje X. Al realizar cálculos con esta fórmula, los signos de las magnitudes que en ella figuran se determinan en correspondencia con el planteamiento del problema.

El movimiento mecánico es relativo. Esto quiere decir, que el desplazamiento y la velocidad del cuerpo son distintos con relación a diversos sistemas de coordenadas que están entre sí en movimiento.

También es relativo el reposo. Si respecto de cierto sistema de coordenadas el cuerpo está en reposo, existen asimismo tales sistemas de referencia con relación a los cuales éste se encuentra en movimiento.

2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO VARIADO

LA VELOCIDAD PUEDE CAMBIAR

Con el movimiento rectilíneo uniforme, para el que el desplazamiento es *lineal* y depende del tiempo de acuerdo con la fórmula $\vec{s} = \vec{v}t$ se tropieza rara vez. Con mucha más frecuencia, se observan movimientos en los que los desplazamientos en iguales intervalos de tiempo son diferentes, por lo que la velocidad varía con el tiempo. Tales movimientos reciben el nombre DE VARIADOS.

Denominamos variado aquel movimiento con el que el cuerpo en iguales intervalos de tiempo realiza diferentes desplazamientos.

Por regla, el movimiento de los trenes, automóviles, aviones, etc., es variado. Para este movimiento, la fórmula $\vec{s} = \vec{v}t$ no sirve al calcular los desplazamientos, ya que en diferentes lugares de la trayectoria la velocidad es distinta. No obstante, para calcular el desplazamiento en caso de semejante movimiento, también es necesario conocer la velocidad. Pero en este caso, el concepto de velocidad varía en cierto grado y es preciso saber calcularla y no medirla simplemente una vez, como lo hacíamos con el movimiento uniforme. ¿Cómo calcular la velocidad y el desplazamiento siendo el movimiento variado? ¿Qué hay que saber con este fin?

2.1. La velocidad en caso de movimiento variado

VELOCIDAD MEDIA. En ciertos casos, cuando se opera con el movimiento variado, se hace uso de la llamada VELOCIDAD MEDIA.

Si el cuerpo realizó un desplazamiento $\vec{s}$ en el intervalo de tiempo t, al dividir $\vec{s}$ por t obtendremos la velocidad media:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{s}}{t}.$$

De esta forma, la velocidad media nos muestra a qué es igual el desplazamiento que el cuerpo efectuó en término medio en la unidad de tiempo[1].

[1] Con frecuencia, al hablar de la velocidad media, por ejemplo, de un automóvil o peatón, se tiene en cuenta no el vector $\vec{v}_{med} = \frac{\vec{s}}{t}$, sino una magnitud escalar que se determina por la *longitud* del espacio que el cuerpo recorre en término medio en la unidad de tiempo: $v_{med} = \frac{l}{t}$.

Por ejemplo, si un tren, moviéndose a lo largo de una recta, recorre 600 km en el transcurso de 10 h, esto significa que en promedio cada hora pasa 60 km. Pero está claro, que cierta parte del tiempo el tren no se encontraba en movimiento, sino que estaba parado; al salir de la estación el tren aumentaba su velocidad, al aproximarse a ella, la velocidad disminuía. Todo esto no se tiene en cuenta al determinar la velocidad media y consideramos que el tren recorre cada hora 60 km, cada media hora 30 km, etc. Utilizando la fórmula $\vec{v}_{med} = \vec{s}/t$ es como si consideráramos que el tren realiza el movimiento uniforme a velocidad constante $\vec{v}_{med}$, aunque es posible que durante todo el tiempo que el tren estuvo en movimiento no hubo ni siquiera una hora en el transcurso de la cual recorrió precisamente 60 km.

El conocimiento de la velocidad media permite determinar el desplazamiento aplicando la fórmula

$$\boxed{\vec{s} = \vec{v}_{med}t.}$$

Con ello es necesario tener presente que esta fórmula proporciona un resultado correcto sólo para aquel sector de la trayectoria donde fue definida la velocidad media. Si haciendo uso de la velocidad media 60 km/h calculamos el desplazamiento del tren no durante 10 h, sino que 2, 4 ó 5 horas, obtendremos un resultado incorrecto. La explicación de este hecho yace en que la velocidad media correspondiente a 10 h, no es igual a las velocidades medias para 2, 4 y 5 h.

Por lo tanto, la velocidad en cuestión no permite, hablando en general, calcular el desplazamiento y las coordenadas de un cuerpo en movimiento en cualquier momento de tiempo. Pero a pesar de todo, también en caso del movimiento variado se puede utilizar el concepto de velocidad, ya que el movimiento mecánico es un proceso *continuo*.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA. La continuidad del movimiento consiste en lo siguiente. Por ejemplo, si un cuerpo (o punto) en movimiento rectilíneo a creciente velocidad se ha desplazado del punto A al B, dicho cuerpo debe pasar obligatoriamente por todos los puntos intermedios que se encuentran entre A y B, sin omitir ninguno de ellos. Esto no es todo. Supongamos que al aproximarse al punto A el cuerpo avanzaba de manera uniforme a una velocidad de 5 m/s, mientras que después de pasar el punto B también se movía uniformemente, pero a una velocidad de 30 m/s, con la particularidad de que el cuerpo ha necesitado 15 s para recorrer el tramo AB. Por consiguiente, en el segmento AB la velocidad del cuerpo ha variado en 25 m/s en el transcurso de 15 s. Pero del mismo modo que el cuerpo no puede omitir ni uno de los puntos de su recorrido, su velocidad deberá tomar todos los valores comprendidos entre 5 y 30 m/s. ¡Y también sin omitir ninguno de ellos! En esto consiste la continuidad del movimiento mecánico: *tanto las coordenadas del cuerpo, como su velocidad, no pueden variar a saltos.* De aquí se desprende una importante conclusión. En el intervalo entre 5 y 30 m/s hay un conjunto innumerable de diversos valores de la velocidad (en matemáticas dicen: cantidad infinitamente grande de valores). Pero entre los puntos A y B hay también un conjunto innumerable (infinitamente grande) de puntos, en tanto que el intervalo de tiempo de 15 segundos, en el transcurso del cual el cuerpo se ha desplazado del

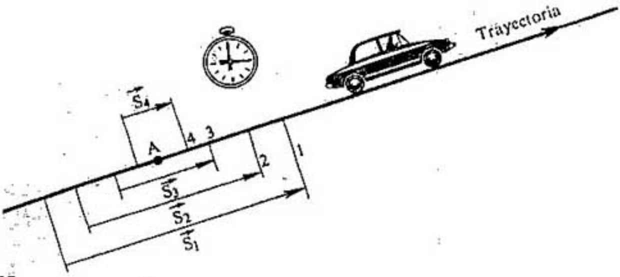


Fig. 37

punto A al B, consta de un conjunto innumerable de momentos de tiempo (¡el tiempo también transcurre sin saltos!).

Por lo tanto, en cada punto de la trayectoria del movimiento y en cada momento de tiempo, la velocidad del cuerpo tenía un valor determinado.

Recibe el nombre de velocidad *instantánea* de un cuerpo aquella que corresponde al momento de tiempo o al punto de la trayectoria que se consideran.

Siendo el movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad del cuerpo es igual a la razón entre su desplazamiento y el intervalo de tiempo durante el que se realizó dicho desplazamiento. A esta misma razón es también igual la velocidad media en caso de movimiento variado, lo que nos permitirá comprender el sentido de la velocidad instantánea.

Supongamos que cierto cuerpo (como siempre, tenemos en cuenta cualquier punto determinado de este cuerpo) está en movimiento rectilíneo, pero no uniforme. ¿Cómo calcular su velocidad instantánea en cierto punto A de su trayectoria? Destaquemos en dicha trayectoria un pequeño sector *1* que contenga el punto A (fig. 37). El pequeño desplazamiento del cuerpo en este sector será designado por $\vec{s}_1$, mientras que el corto intervalo de tiempo durante el que aquél se ha realizado por Δt_1. Dividiendo $\vec{s}_1$ por Δt_1, obtendremos el valor de la velocidad media en este sector: la velocidad varía continuamente y en diversos lugares del sector *1* es diferente.

Disminuyamos ahora la longitud del sector *1*. Elijamos el sector *2* (véase la fig. 37) de manera que también contenga el punto A. En este sector el desplazamiento es igual a $\vec{s}_2$ $(s_2 < s_1)$ y el cuerpo lo recorre durante el tiempo Δt_2. Está claro, que en el sector 2 la velocidad del cuerpo variará en una magnitud menor. Pero la razón $\vec{s}_2/\Delta t_2$ nos proporcionará la velocidad media para este sector menor. La velocidad variará aún menos en el sector *3* (que también contiene el punto A) y este último es menor que los sectores *1* y *2*. Dividiendo el desplazamiento $\vec{s}_3$ por el intervalo de tiempo Δt_3, de nuevo obtenemos la velocidad media en este pequeño sector de la trayectoria.

Sigamos disminuyendo gradualmente el intervalo de tiempo durante el que examinamos el desplazamiento del cuerpo. Con aquél, simultáneamente, disminuirá también el desplazamiento del cuerpo. Al fin y a la postre, el sector de la trayectoria, adyacente al punto A, recorrido por el punto del cuerpo, se concentrará en el propio punto A. Precisamente en este caso, la velocidad media se convierte en velocidad instantánea en el punto A, donde el cuerpo se encuentra en el momento dado de tiempo. En efecto, siendo el sector lo suficientemente pequeño, la variación de la velocidad será tan insignificante, que puede ser despreciada, es decir, podemos considerar que la velocidad no varía.

La velocidad instantánea, o la velocidad en el punto dado, es igual a la razón entre un desplazamiento suficientemente pequeño en el sector de la trayectoria adyacente a dicho punto y el intervalo pequeño de tiempo durante el cual se realiza el mencionado desplazamiento.

Está claro, que la velocidad del movimiento rectilíneo uniforme corresponde también a su velocidad instantánea y media.

La velocidad instantánea es una magnitud vectorial. Su dirección coincide con la del desplazamiento (movimiento) en el punto dado. En lo sucesivo, cuando hablemos de la velocidad del movimiento variado, tendremos en cuenta la velocidad instantánea.

Así pues, el procedimiento al que recurrimos para explicar el sentido de la velocidad instantánea, consiste en lo siguiente. El sector de la trayectoria y el tiempo consumido para recorrerlo, mentalmente, han sido de forma gradual disminuidos hasta que el primero no pueda ser distinguido del punto y el movimiento variado, del uniforme. Siempre se hace uso de semejante procedimiento cuando se estudian fenómenos en los que tratamos con cualesquiera magnitudes que varían *continuamente*.

Después de lo dicho, nos queda aclarar que debemos conocer para hallar la velocidad instantánea del cuerpo en cualquier punto de la trayectoria y en todo momento de tiempo.

¿ ?

1. ¿Qué es la velocidad media?
2. ¿Conociendo la velocidad media de movimiento de un cuerpo durante determinado intervalo de tiempo, podemos o no hallar el desplazamiento realizado por el cuerpo en el transcurso de cualquier parte de dicho intervalo?
3. ¿En qué consiste la continuidad del movimiento?
4. ¿Qué es la velocidad instantánea?

Ejercicios 5

1. Al pasar de un poblado a otro, un automóvil se desplazó la mitad del tiempo a velocidad constante de 60 km/h. ¿A qué velocidad constante deberá desplazarse el vehículo el resto del tiempo, si la velocidad media de movimiento es igual a 65 km/h?
2. Hasta su lugar de destino, un automóvil pasa la primera mitad del recorrido a velocidad constante de 50 km/h, la segunda mitad, a velocidad constante de 60 km/h. Determinar la velocidad media del auto.

2.2. Tercera magnitud cinemática: la aceleración. Movimiento uniformemente variado

En caso de movimiento variado la velocidad instantánea del cuerpo varía constantemente: de un punto a otro, de un momento de tiempo a otro. ¿Cómo calcular la velocidad instantánea del cuerpo?

Ya hemos visto que, para calcular la coordenada del cuerpo en todo momento de tiempo, era necesario conocer con qué rapidez la misma variaba con el tiempo. De forma exactamente igual, para calcular la velocidad en cualquier momento de tiempo, es preciso conocer con qué rapidez ésta varía o, con otras palabras, cuál es la variación de la velocidad en la unidad de tiempo.

MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO. Para simplificar, vamos a considerar tal movimiento variado del cuerpo, con el que la velocidad en cualesquiera intervalos de tiempo iguales, varía de la misma manera. Semejante movimiento denomínase UNIFORMEMENTE VARIADO.

Recibe el nombre de uniformemente variado el movimiento de un cuerpo con el que su velocidad, en el transcurso de cualesquiera intervalos iguales de tiempo, varía del mismo modo.

Si en cierto instante inicial la velocidad del cuerpo es igual a $\vec{v}_0$ y después de un intervalo de tiempo t resulta ser igual a $\vec{v}$, entonces en cada unidad de tiempo, la velocidad cambiará en $(\vec{v}-\vec{v}_0)/t$, siendo ésta la magnitud que caracteriza la rapidez de variación de la velocidad y que se denomina ACELERACIÓN.

Como la aceleración es igual al producto de la magnitud vectorial $\vec{v}-\vec{v}_0$ por la escalar $1/t$, dicha magnitud también es vectorial (véase 1.4). La aceleración se designa con la letra $\vec{a}$:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}. \tag{1}$$

Recibe el nombre de aceleración de un cuerpo en movimiento uniformemente variado una magnitud constante igual a la razón entre la variación de la velocidad del cuerpo y el intervalo de tiempo, en el transcurso del cual se produce dicha variación.

Si el valor absoluto de la aceleración del cuerpo es grande, esto quiere decir que éste adquiere (cuando se acelera) o pierde (cuando se frena) velocidad con rapidez[1)].

Si son conocidas la velocidad inicial $\vec{v}_0$ del cuerpo y su aceleración $\vec{a}$, puede ser calculada la velocidad $\vec{v}$ del cuerpo en cualquier momento de tiempo. En efecto, de la fórmula (1) sigue que

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t. \tag{2}$$

[1)] Si durante iguales intervalos de tiempo la velocidad de un cuerpo varía de modo desigual, hay que recurrir a la aceleración instantánea. El valor de ésta se determina aplicando el mismo método que empleamos al tratar la velocidad instantánea.

La necesidad de conocer la aceleración radica, precisamente, en que ésta es necesaria para calcular la velocidad instantánea $\vec{v}$ del cuerpo.

¿En qué unidades se mide la aceleración?

Ya que $\vec{a} = \vec{v} - \vec{v}_0/t$, el módulo de la acleración es igual a la unidad si es igual a uno el módulo de la variación de la velocidad y asimismo el intervalo de tiempo.

Por esta causa, *la unidad de acleración en el SI será la de un movimiento uniformemente variado tal que en* 1 s *la velocidad varía* 1 m/s. Por lo tanto, la aceleración se expresa en METROS POR SEGUNDO EN UN SEGUNDO O BIEN EN METROS POR SEGUNDO CUADRADO.

PROYECCIONES DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN. Ya hemos indicado que al efectuar cálculos hay que hacer uso de ecuaciones en las que figuran no vectores, sino que sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas.

Siendo el movimiento rectilíneo, los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{v}$ están dirigidos a lo largo de una misma recta, que al mismo tiempo es la trayectoria del movimiento. También es cómodo dirigir por ella el eje de coordenadas (por ejemplo, el eje X).

Como vimos en 1.4, la proyección de la suma de dos vectores sobre cierto eje es igual a la adición de sus proyecciones sobre ese mismo eje. Designemos las proyecciones de los vectores $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ sobre el eje X por v_x, v_{0x} y a_x. Entonces, de la ecuación (2) se deduce:

$$\boxed{v_x = v_{0x} + a_x t.} \tag{3}$$

Como los tres vectores $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ yacen en una misma recta (eje X), los valores absolutos de sus proyecciones son iguales a los módulos de los propios vectores, mientras que los signos de las proyecciones se determinan de acuerdo con la dirección de aquéllos en relación con el eje elegido.

Si los signos de las proyecciones de los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ coinciden, el módulo de la velocidad del cuerpo crecerá con el tiempo, es decir, el cuerpo se acelerará. Por el contrario, si los signos de las proyecciones de los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ son opuestos, el módulo de la velocidad del cuerpo disminuirá con el tiempo, o sea, el cuerpo se frenará.

Pero si el cuerpo es frenado, en cierto momento de tiempo su velocidad deberá resultar nula. ¿Cómo en tal caso el cuerpo se moverá más adelante? En el problema 2 (pág. 47) se examina este caso: resulta que el cuerpo varía la dirección de su movimiento por la inversa.

Por regla, el movimiento a una velocidad de creciente módulo se denomina acelerado, mientras que el movimiento a velocidad decreciente, retardado. Pero en mecánica, todo movimiento rectilíneo variado recibe el nombre de acelerado. Tanto cuando arranca un automóvil o bien cuando frena en los dos casos se mueve con aceleración. La diferencia entre el movimiento rectilíneo acelerado y retardado sólo consiste en el signo de la proyección del vector de aceleración sobre el eje elegido.

PROBLEMA 1. Un automóvil pasa delante de un observador a la velocidad de 10 m/s. En este momento el chófer aprieta el freno y el vehiculo

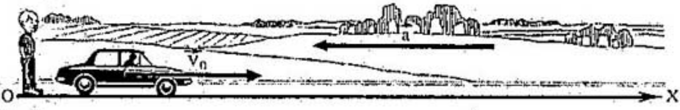


Fig. 38

comienza a moverse con aceleración de 1 m/s². ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta la plena parada del automóvil?

Solución. Como comienzo de registro de la coordenada elegimos el lugar donde se encuentra el observador, mientras que dirigimos el eje de coordenadas X en el sentido que se mueve el automóvil (fig. 38). Designemos por $\vec{v}_0$ la velocidad del automóvil en el momento en que aquél pasa delante del observador y su aceleración después de conectar el freno por $\vec{a}$.

Para calcular el tiempo hasta la parada, empleamos la fórmula

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

donde v_x, v_{0x}, a_x son las proyecciones de la velocidad final e inicial del automóvil y de su aceleración sobre el eje X, respectivamente.

El automóvil se mueve a lo largo del eje X, por lo que $v_{0x} = v_0$ y como su velocidad disminuye $a_x = -a$. En el momento de la parada $v_x = 0$. Por lo tanto,

$$0 = v_0 - at \text{ o bien } at = v_0.$$

De donde $$t = \frac{v_0}{a}.$$

Poniendo en esta expresión los valores de v_0 y a, obtenemos

$$t = \frac{10\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{1\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10\text{ s}.$$

El automóvil se parará 10 s después de empezar a frenar.

PROBLEMA 2. Un cuerpo avanza en movimiento rectilíneo a velocidad que disminuye gradualmente. La aceleración $\vec{a}$ es constante y su módulo es igual a 4 m/s². En cierto momento de tiempo el módulo de la velocidad del cuerpo $v_0 = 20$ m/s. Hallar la velocidad del cuerpo después de que transcurrán $t_1 = 4$ s y $t_2 = 8$ s a partir de dicho momento.

Solución. Dirijamos el eje de coordenadas X en la dirección de la velocidad inicial. En tal caso, la proyección v_{0x} es positiva y es igual al módulo del vector $\vec{v}_0$: $v_{0x} = v_0$. Pero como la velocidad del cuerpo disminuye, la proyección de la aceleración a_x es negativa e igual a $-a$: $a_x = -a$.

Para hallar la proyección de la velocidad v_x en los momentos de tiempo indicados en el problema, aplicamos la fórmula

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

De aquí, para el momento de tiempo t_1, hallamos:

$$v_{1x} = v_0 - at_1 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 4\text{ s} = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

y para el momento de tiempo t_2

$$v_{2x} = v_0 - at_2 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 8\ \text{s} = -\ 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

El signo "menos" significa que al final del 8° segundo, el cuerpo se movía en dirección opuesta a la inicial.

Es obvio, que antes de comenzar el movimiento hacia el lado contrario, el cuerpo debió pararse. Es fácil determinar en qué momento de tiempo t' sucedió esto, ya que la proyección de la velocidad v_x es igual a cero cuando $v_{0x} = -a_x t'$. De aquí

$$t' = -\frac{v_{0x}}{a_x}, \quad t' = -\frac{20\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{-4\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5\ \text{s}.$$

La dirección del movimiento del cuerpo cambió por la inversa a los 5 s después del momento en que su velocidad resultó igual a 20 m/s.

¿ ?

1. ¿Qué es la aceleración y con qué fin es necesario conocerla?
2. Para todo movimiento variado la velocidad varía. ¿Cómo la aceleración caracteriza esta variación?
3. ¿En qué difiere el movimiento rectilíneo "retardado" del "acelerado"?
4. ¿Qué es el movimiento uniformemente variado?
5. ¿Podrá moverse un cuerpo a gran velocidad, pero con pequeña aceleración?
6. ¿Cómo está dirigido el vector de aceleración en caso de movimiento rectilíneo variado?
7. La velocidad es un vector y puede cambiar tanto su módulo, como la dirección del vector de velocidad. ¿Qué es lo que concretamente se modifica durante el movimiento rectilíneo uniformemente variado?
8. ¿Depende o no la aceleración, en caso de movimiento rectilíneo uniformemente variado, de la elección del sistema de referencia?

Ejercicios 6

1. Al arrancar, un trolebús se pone en movimiento con aceleración constante 1,5 m/s^2. ¿Después de qué intervalo de tiempo alcanzará el vehículo la velocidad de 54 km/h?
2. Un automóvil en movimiento a una velocidad de 36 km/h, se para al frenar en el transcurso de 4 s. ¿Con qué aceleración constante se mueve el auto durante el frenado?
3. Un camión en movimiento con aceleración constante, en cierto sector del recorrido, aumentó su velocidad de 15 a 25 m/s. ¿Durante qué intervalo de tiempo se produjo este aumento de la velocidad, si la aceleración del camión es igual a 1,6 m/s^2?
4. ¿Qué velocidad de movimiento sería alcanzada si el cuerpo estuviera en movimiento rectilíneo con aceleración de 10 m/s^2 durante 0,5 h, siendo la velocidad inicial nula?

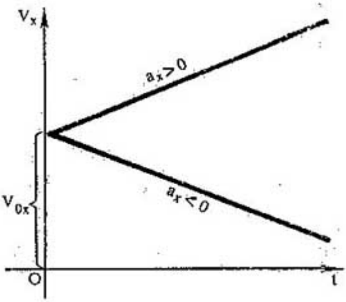


Fig. 39

2.3. El desplazamiento cuando el movimiento es uniformemente variado

Para nosotros, lo más importante es saber calcular las coordenadas del cuerpo. Propiamente, este es el problema fundamental de la mecánica. Pero para resolverlo, tenemos que saber cómo calcular el desplazamiento del cuerpo. ¿Mas cómo calcular esta magnitud para el movimiento uniformemente variado?

Si hacemos uso del método gráfico, es de suma sencillez deducir la fórmula para definir el desplazamiento.

En 1.7 vimos que, para el movimiento rectilíneo uniforme, el desplazamiento del cuerpo es numéricamente igual al área de la figura (rectángulo) situada debajo de la gráfica de velocidad. ¿Será esto válido para el movimiento uniformemente variado?

Con este tipo de movimiento del cuerpo a lo largo del eje X, la velocidad no se mantiene constante, sino que varía con el tiempo de acuerdo con la fórmula

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

Por esta razón, las gráficas de las proyecciones de la velocidad tienen la forma ofrecida en la fig. 39. La recta l en dicha figura corresponde al

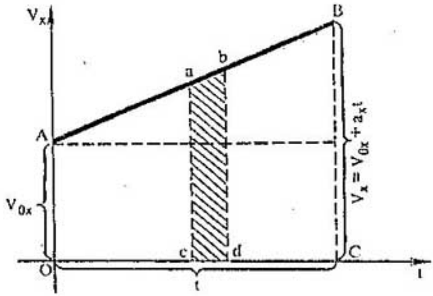


Fig. 40

4—948

movimiento con la proyección positiva de la aceleración (la velocidad aumenta), mientras que la recta 2, al movimiento con la proyección negativa de la aceleración (la velocidad disminuye). Las dos gráficas se refieren al caso cuando en el momento de tiempo $t = 0$ el cuerpo tenía la velocidad $\vec{v}_0$.

EL DESPLAZAMIENTO PUEDE SER EXPRESADO MEDIANTE EL ÁREA. Destaquemos en la gráfica de velocidad del movimiento uniformemente variado un pequeño sector *ab* (fig. 40) y de los puntos *a* y *b* tracemos perpendiculares al eje *t*. La longitud del segmento *cd* en el eje *t* es numéricamente igual al pequeño intervalo de tiempo, durante el cual la velocidad varió desde su valor en el punto *a* hasta su valor en el punto *b*. Debajo del sector *ab* hemos obtenido una pequeña banda *abcd*.

Si el intervalo de tiempo, numéricamente igual al segmento *cd*, es pequeño en suficiente grado, la variación de la velocidad durante ese tiempo también será pequeña.

En el transcurso de tan pequeño intervalo de tiempo podemos considerar que el movimiento es uniforme y que la banda *abcd* poco difiere del rectángulo. Por ello, el área de la banda es numéricamente igual al módulo del desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo que corresponde al segmento *cd*.

Pero todo el área de la figura situada debajo de la gráfica de la velocidad, puede ser dividida en bandas estrechas. Por consiguiente, el desplazamiento durante todo el tiempo t es numéricamente igual al área del trapecio *OABC*. Mas como sabemos de la geometría, el área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura. En nuestro caso, la longitud de una de las bases es numéricamente igual a v_{0x}, la de la segunda, a v_x. Su altura es numéricamente igual a t. De aquí se deduce que el desplazamiento

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \tag{1}$$

En vez de v_x pongamos en esta fórmula la magnitud $v_{0x} + a_x t$ que es igual a ella. Entonces

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = \frac{2v_{0x} + a_x t^2}{2}.$$

Dividiendo término a término el numerador por el denominador, obtenemos:

$$\boxed{s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.} \tag{2}$$

Al hacer uso de esta fórmula, es necesario no olvidar que s_x; v_{0x} y a_x pueden ser tanto positivos, como negativos, es decir, son las proyecciones de los vectores $\vec{s}$, $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ sobre el eje X.

Si la proyección de la velocidad inicial v_{0x} es igual a cero, la fórmula (2) adquiere el aspecto de:

$$s_x = \frac{a_x t^2}{2}.$$

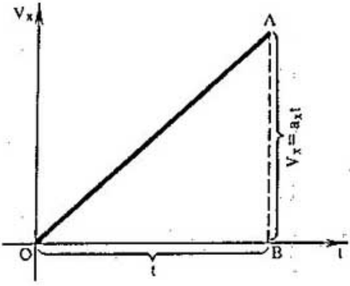


Fig. 41

La gráfica de semejante movimiento viene representada en la fig. 41.

Después de obtener la fórmula para calcular el desplazamiento, podemos también hallar con facilidad la fórmula de cálculo de las coordenadas x del cuerpo en todo momento de tiempo. Hemos visto (véase 1.5) que para determinar la coordenada x en cierto momento de tiempo t, hay que añadir a la coordenada inicial x_0 la proyección del vector de desplazamiento del cuerpo sobre el eje de coordenadas:

$$x = x_0 + s_x.$$

Por lo tanto

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (3)$$

Con esta fórmula se define la posición del cuerpo en cualquier momento de tiempo para el movimiento rectilíneo uniformemente variado. Con el fin de hallar x, es preciso conocer la coordenada inicial x_0 y la velocidad inicial $\vec{v}_0$, así como la aceleración $\vec{a}$.

Las fórmulas (2) y (3) permiten describir el movimiento rectilíneo uniformemente variado, del mismo modo que la fórmula (3) de 1.6 permitía describir el movimiento uniforme. Como hemos visto, para describir el

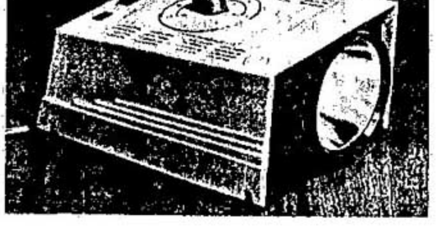


Fig. 42

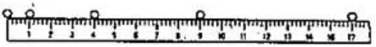


Fig. 43

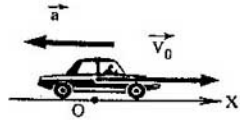


Fig. 44

movimiento rectilíneo uniformemente variado, ha sido necesaria una magnitud cinemática más – la aceleración.

¿CÓMO SE HALLA LA ACELERACIÓN? Uno de los procedimientos para determinar la aceleración es el llamado método ESTROBOSCÓPICO. Consiste en que un cuerpo que se mueve en la oscuridad se ilumina dentro de intervalos iguales de tiempo con un destello luminoso, lo que se realiza con ayuda de un aparato denominado ESTROBOSCOPIO, cuyo aspecto se muestra en la fig. 42. Está claro que el cuerpo será visible sólo en aquellas posiciones durante las que resulta iluminado. Si durante su movimiento el cuerpo se fotografía (el obturador de la cámara fotográfica debe permanecer abierto durante todo el tiempo del movimiento), en la película fotográfica se observarán las posiciones sucesivas del cuerpo al transcurrir iguales intervalos de tiempo.

En la fig. 43 está representada la fotografía de una bolita que se mueve por un plano inclinado, con un intervalo de tiempo de 0,2 s entre los destellos. Con el fin de hallar la aceleración en semejante fotografía, hay que medir las longitudes l_1 y l_2 de dos sectores adyacentes arbitrarios recorridos por la bolita entre los destellos. Dichas longitudes son iguales a los módulos de los desplazamientos $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$ durante el intervalo de tiempo τ entre los destellos.

Escribiendo las fórmulas para s_1 y s_2 y tomando en consideración que la velocidad al final de cualquier intervalo de tiempo es igual a la velocidad al principio del intervalo vecino, obtenemos la expresión para el módulo de la aceleración:

$$a = \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

VELOCIDAD MEDIA. En la fórmula (1) la expresión $(v_{0x} + v_x)/2$ es la proyección de la velocidad media sobre el eje X para el movimiento uniformemente variado:

$$v_{\text{med}.x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2}. \qquad (4)$$

Esto se advierte comparando la fórmula (1) con la aducida en la pág. 42.

PROBLEMA 1. El chófer de un automóvil, que avanza con una velocidad de 72 km/h, vio la señal roja de un semáforo y apretó el freno. Después de esto, el auto comenzó a disminuir la velocidad, moviéndose con aceleración de 5 m/s^2. ¿Qué distancia recorrerá el vehículo durante los primeros 2 s después de comenzar el frenado? ¿Qué distancia cubrirá el auto hasta su plena parada?

Solución. Dirigimos el eje de coordenadas X en la dirección del movimiento del automóvil (fig. 44), tomando como comienzo de registro de la coordenada aquel punto de la carretera donde se inició el frenado. El registro de tiempo lo referiremos al instante en que el chófer apretó sobre el freno.

La velocidad $\vec{v}_0$ del automóvil está dirigida lo mismo que el eje X, mientras que la aceleración del vehículo tiene dirección contraria a la de dicho eje, de forma que la proyección de $\vec{v}_0$ es positiva, la de $\vec{a}$, negativa. Por consiguiente, $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$.

La coordenada del automóvil la hallamos aplicando la fórmula

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Según el planteamiento del problema $x_0 = 0$, $v_0 = 20$ m/s, $a_x = -5$ m/s^2, $t = 2$ s. Por lo tanto,

$$x = 0 + 20\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2\ \text{s} + \frac{-5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 4\ \text{s}^2}{2} = 40\ \text{m} - 10\ \text{m} = 30\ m.$$

Hallemos ahora qué distancia recorrió el automóvil antes de su plena parada. Con este fin, hay que conocer el tiempo t_1 de movimiento hasta la parada. Éste puede ser definido recurriendo a la fórmula

$$v_x = v_{0x} + a_x t_1.$$

En el momento de la parada la velocidad es nula, de forma que

$$0 = v_{0x} + a_x t_1 \quad \text{o bien} \quad 0 = v_0 - at_1,$$

de donde

$$t_1 = \frac{v_0}{a}.$$

Pongamos esta expresión del tiempo en la fórmula para hallar la coordenada

$$x = x_0 + v_{0x}t_1 + \frac{a_x t_1^2}{2}.$$

Obtenemos

$$x = v_0\frac{v_0}{a} - a\frac{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

De aquí, teniendo en cuenta los datos del problema, obtenemos

$$x = \frac{\left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 40\ \text{m}.$$

PROBLEMA 2. Determinar el desplazamiento del cuerpo cuya gráfica de velocidad viene representada en la fig. 45.

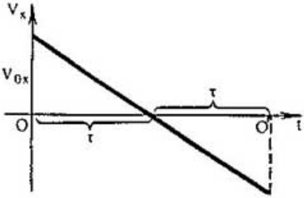


Fig. 45

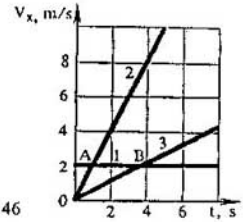


Fig. 46

Solución. Del examen de la gráfica se desprende que al principio el módulo de la velocidad del cuerpo disminuye con el tiempo. Esto significa que el vector de la aceleración está dirigido al encuentro del vector de la velocidad y que la proyección a_x es negativa. La proyección del desplazamiento s_x la calcularemos según la fórmula

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

En la fig. 45 vemos que cuando $t = \tau$ la proyección de la velocidad v_x es igual a cero. Pero $v_x = v_{0x} + a_x t$. Por lo que $0 = v_{0x} + a_x\tau$, de donde

$$a_x = -\frac{v_{0x}}{\tau}.$$

Todo el tiempo durante el cual hay movimiento es igual a 2τ. Así, que

$$s_x = v_{0x}2\tau + \frac{-\frac{v_{0x}}{\tau}(2\tau)^2}{2} = 2v_{0x}\tau - \frac{4v_{0x}\tau}{2} = 0.$$

El resultado nos muestra que la gráfica representada en la fig. 45, corresponde a un cuerpo que primero se mueve en una dirección y, a continuación, recorre esa misma distancia en dirección contraria, a causa de lo cual el cuerpo de nuevo retorna al punto inicial.

¿ ?

1. ¿En qué difieren las gráficas de velocidad de los movimientos uniformemente variado y uniforme?
2. ¿Cómo se puede hallar el desplazamiento de un cuerpo en la gráfica de velocidad del movimiento uniformemente variado?
3. ¿Qué hay que saber para calcular la coordenada del cuerpo en cualquier momento de tiempo siendo su movimiento rectilíneo uniformemente variado?
4. Comparar cómo depende del tiempo el módulo del desplazamiento de cuerpos en movimiento uniforme y uniformemente variado. ¿En qué consiste la diferencia entre dichas dependencias?
5. ¿A qué es igual la velocidad media en caso de movimiento uniformemente variado?

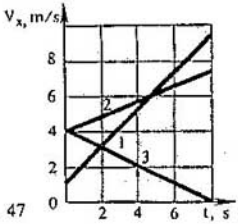


Fig. 47

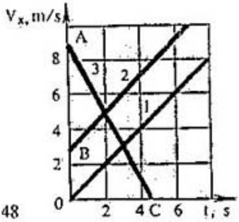


Fig. 48

Ejercicios 7

1. Construir en los mismos ejes de coordenadas las gráficas de velocidad de dos cuerpos en movimiento uniformemente variado: el primer cuerpo con velocidad inicial 1 m/s y aceleración 0,5 m/s^2, el segundo, con velocidad inicial 9 m/s y aceleración $-1,5$ m/s^2. Determinar: a) ¿qué camino recorrerá el segundo cuerpo hasta su parada? b) ¿después de qué intervalo de tiempo las velocidades de los dos cuerpos serán iguales y qué distancia recorrerá durante dicho tiempo el primer cuerpo?
2. En la fig. 46 vienen representadas las gráficas de velocidad de movimiento de tres cuerpos. ¿Cuál es el carácter de sus movimientos? ¿Qué podemos decir acerca de las velocidades de movimiento de los cuerpos en los momentos de tiempo correspondientes a los puntos *A* y *B*? Definir la aceleración y escribir las expresiones para las velocidades y desplazamientos de dichos cuerpos.
3. Haciendo uso de las gráficas de velocidad y desplazamiento de los tres cuerpos, aducidos en la fig. 47, realizar las siguientes tareas: a) determinar las aceleraciones de esos cuerpos; b) escribir para cada cuerpo la fórmula de la dependencia entre la velocidad y el tiempo; c) hallar en qué se parecen y en qué difieren los movimientos correspondientes a las gráficas 2 y 3.
4. En la fig. 48 se ofrecen las gráficas de velocidad de movimiento de tres cuerpos. Basándose en esas gráficas: a) determinar a qué corresponden los segmentos *OA*, *OB* y *OC* en los ejes de coordenadas; b) hallar la aceleración con la que se mueven los cuerpos; c) escribir las expresiones para las velocidades y desplazamientos de cada uno de los cuerpos.
5. Al despegar, un avión recorre la pista de despegue durante 15 s y en el momento cuando se desprende de la tierra alcanza una velocidad de 100 m/s. ¿Con qué aceleración se movía el avión y cuál es la longitud de la pista?
6. Un proyectil cuya velocidad es igual a 1000 m/s atraviesa la pared de un blindaje en 10^{-3} s, después de lo cual tiene una velocidad de 200 m/s. Considerando que el movimiento del proyectil cuando atraviesa la pared es uniformemente variado, hallar el grosor de ésta.
7. Un cohete se mueve con aceleración de 45 m/s^2 y en cierto momento de tiempo alcanza una velocidad de 900 m/s. ¿Qué espacio recorrerá aquél durante los siguientes 2,5 s?
8. ¿A qué distancia de la Tierra estaría una nave cósmica después de 30 min de su lanzamiento si todo el tiempo estuviera en movimiento rectilíneo con una aceleración de 9,8 m/s^2?

2.4. Cómo hallar el desplazamiento de un cuerpo en movimiento uniformemente variado, conociendo la velocidad inicial y final de su movimiento

Hay ocasiones, en que es preciso calcular el desplazamiento de un cuerpo en movimiento uniformemente variado, sin conocer cuánto tiempo pasó desde el comienzo del movimiento, pero son conocidas las velocidades inicial y final del cuerpo. La fórmula que permite calcular la proyección del desplazamiento se deduce de la fórmula (1) en 2.3 y de la fórmula $v_x = v_{0x} + a_x t$.

De la última, hallamos el valor de t:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

y lo ponemos en la fórmula (1) de 2.3. Obtenemos

$$s_x = \frac{v_x + v_{0x}}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{(v_x + v_{0x})(v_x - v_{0x})}{2a_x}.$$

De aquí

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \tag{1}$$

Hemos obtenido la fórmula que nos permite calcular el desplazamiento (y, por lo tanto, también la coordenada, ya que $x = x_0 + s_x$) si conocemos las velocidades inicial y final del cuerpo y su aceleración.

Aplicando la fórmula (1) podemos asimismo hallar el valor de la velocidad en cualquier punto, por el que pasa el cuerpo.

Si la velocidad inicial del cuerpo es nula,

$$s_x = \frac{v_x^2}{2a_x}. \tag{2}$$

PROBLEMA. Al aproximarse a la estación, el maquinista desconecta el motor de la locomotora, después de lo cual el tren avanza con una aceleración constante de 0,1 m/s². ¿Qué desplazamiento realizó el tren hasta su parada, si la velocidad de éste era de 20 m/s en el momento de la desconexión del motor? ¿Después de qué intervalo de tiempo se paró el tren?

Solución. Dirigimos el eje de coordenadas X a lo largo de la dirección de movimiento del tren. Como comienzo de registro del tiempo, tomamos el momento de la desconexión del motor, como comienzo de la cuenta de la coordenada, el punto en el que se encontraba el tren en ese momento.

La velocidad del tren tiene la misma dirección que el eje X, en tanto que la aceleración del tren está dirigida en sentido opuesto al del eje. Por esta razón, la proyección de la velocidad $\vec{v}_0$ es positiva, la de la aceleración $\vec{a}$, negativa. Así, pues, $v_{0x} = v_0$; $a_x = -a$.

El desplazamiento desde el punto en el que se encontraba el tren, cuando desconectaron el motor, puede ser calculado utilizando la fórmula

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Poniendo aquí los datos aducidos en el problema y tomando en consideración que en el momento de la parada del tren la velocidad es nula, obtenemos

$$s_x = \frac{0 - \left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{-2\cdot 0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{400}{0{,}2}\ \text{m} = 2000\ \text{m}.$$

El tiempo que pasa hasta la parada lo hallamos de acuerdo con la fórmula $v_x = v_{0x} + a_x t$.

Como $v_x = 0$, entonces, $0 = v_0 - at$, de donde

$$t = \frac{v_0}{a};\quad t = \frac{20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 200\ \text{s} = 3\ \text{min}\ 20\ \text{s}.$$

Ejercicios 8

1. Las observaciones mostraron que un caballo de carreras alcanza su velocidad máxima, igual a 15 m/s, a partir del instante de la salida, al acelerarse durante 30 m. ¿Con qué aceleración constante galopa el caballo en dicho sector?
2. Para desprenderse de la tierra un avión debe alcanzar la velocidad de 180 km/h. ¿A qué distancia del punto de partida en la pista de despegue alcanza el avión la indicada velocidad si su aceleración es constante e igual a 2,5 m/s^2?
3. Un tren de pasajeros frena y con ello se mueve con aceleración 0,15 m/s^2. ¿A qué distancia del lugar donde fue conectado el freno la velocidad resultará igual a 3,87 m/s, si era 54 km/h en el momento en que comenzó el frenado?

2.5. Caída libre de los cuerpos. Aceleración de la caída libre

La caída libre de un cuerpo y el movimiento de otro que fue lanzado hacia arriba en dirección vertical son interesantes ejemplos de movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Semejantes movimientos fueron estudiados por GALILEO GALILEI. Él fue quien estableció que dichos movimientos son uniformemente variados. Sus mediciones mostraron que en caso de estos movimientos la aceleración está dirigida hacia abajo y su valor absoluto es, aproximadamente, igual a 9,8 m/s^2.

Lo más asombroso consiste en que durante mucho tiempo era un enigma el hecho de que *esta aceleración es igual para todos los cuerpos.*

Galileo Galilei (1564–1642) – eminente físico y astrónomo italiano. Fue el primero en aplicar los métodos experimentales para investigar la naturaleza. Descubrió la ley de caída de los cuerpos, estableció la ley de inercia. Inventó el anteojo y lo empleó para observaciones astronómicas, realizando una serie de importantes descubrimientos. Como partidario activo de la teoría de Copérnico sobre la rotación de la Tierra, Galileo fue dos veces juzgado por la inquisición, que obligó al sabio a abjurar públicamente dicha teoría. Según una leyenda, Galileo después de su abjuración obligada, exclamó: "¡Y sin embargo se mueve!"

Si tomamos una pequeña bola de acero, un balón de fútbol, un diario abierto, una pluma de ave y todos estos objetos heterogéneos los lanzamos desde una altura de varios metros y observamos su movimiento, veremos que las aceleraciones de todos estos cuerpos son diferentes. La explicación de este fenómeno radica en que al moverse hacia la tierra, los cuerpos deben pasar a través del aire que obstaculiza su movimiento. Si los cuerpos cayeran en un tubo, del que se ha extraído el aire, sus aceleraciones serían iguales. Semejante experimento se puede realizar con ayuda de un tubo de vidrio de gruesas paredes de cerca de 1 m de longitud, un extremo del cual está cerrado y en el otro hay un grifo (fig. 49, *a*). En su interior ponemos tres distintos objetos, por

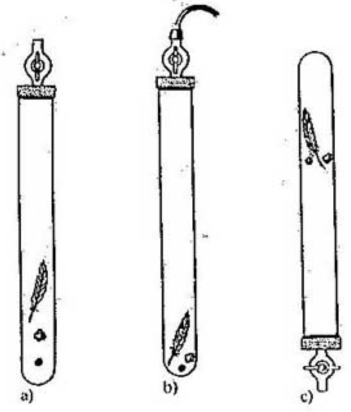


Fig. 49

ejemplo: un perdigón, un trozo de corcho y una pluma de ave. A continuación, damos con rapidez la vuelta al tubo. Los tres cuerpos caerán al fondo del tubo pero después de pasar diferentes intervalos de tiempo: primero el perdigón, seguidamente el corcho y, por último, la pluma. Pero los cuerpos caen de esta forma en caso de que el tubo contenga aire. Es suficiente extraer el aire con una bomba (fig. 49, *b*) y, después de cerrar el grifo de bombeo y de nuevo dar la vuelta al tubo (fig. 49, *c*), veremos que los tres cuerpos caerán al mismo tiempo. Es decir, en el vacío todos los cuerpos caen con igual aceleración.

Semejante caída en el vacío, a la que nada obstaculiza, recibe el nombre de caída libre.

Con el fin de distinguir la caída libre de los demás movimientos acelerados, se ha adoptado designar la aceleración de dicha caída con la letra g en vez de a. Así pues, el vector $\vec{g}$ siempre está dirigido hacia abajo: en esta dirección el cuerpo se mueve a velocidad creciente, hacia arriba, decreciente; el módulo de la aceleración de la caída libre $g = 9{,}8$ m/s^2. Si dirigimos el eje de coordenadas en sentido vertical (arriba o abajo), lo que se hace con frecuencia, y lo designamos con Y, el módulo de la proyección g_Y será igual al módulo del vector $\vec{g}$. La proyección resultará positiva cuando el eje Y está dirigido hacia abajo y negativa cuando dicho eje se dirige hacia arriba.

Lo más importante en el segundo capítulo

El problema fundamental de mecánica consiste en definir la posición del cuerpo en todo momento de tiempo. La solución de este problema se lleva a cabo por una singular "cadena": para hallar la coordenada del punto, hay que conocer su desplazamiento, mientras que para calcular éste, es preciso conocer la velocidad de movimiento. Ateniéndose a la "cadena" velocidad – desplazamiento – coordenada, se resuelven los problemas de mecánica para el movimiento rectilíneo uniforme. Si el movimiento es acelerado, es necesario conocer la aceleración, de forma que para semejante movimiento, los problemas serán resueltos por la "cadena" aceleración – velocidad – desplazamiento – coordenada. Tanto para el movimiento uniforme, como para el acelerado deben ser conocidas las "condiciones iniciales", o sea, las coordenadas y la velocidad iniciales.

Con el movimiento rectilíneo acelerado, la velocidad instantánea del cuerpo (punto material) varía constantemente de un momento de tiempo a otro. Por eso, para calcular la velocidad en cualquier momento de tiempo y en todo punto hay que conocer la velocidad de su variación, es decir, la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

La proyección de la velocidad del cuerpo sobre el eje de coordenadas elegido, en el momento de tiempo t, se calcula conforme a la fórmula

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

La coordenada del cuerpo se halla con ayuda de la fórmula

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

mientras que la proyección del desplazamiento $s_x = x - x_0$, aplicando la fórmula

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

De las fórmulas aducidas obtenemos las de la velocidad, coordenadas y desplazamiento para el movimiento rectilíneo uniforme, si tomamos $a_x = 0$.

El valor de la proyección del desplazamiento siendo el movimiento uniformemente variado puede también determinarse por la fórmula

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Como $s_x = x - x_0$, para la coordenada del cuerpo tenemos

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Durante los cálculos con las fórmulas ofrecidas, los signos de las proyecciones de los vectores $\vec{v}$, $\vec{v}_0$, $\vec{a}$, así como el signo de la coordenada inicial x_0 se determinan considerando los datos del problema y la dirección del eje de coordenadas.

3 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

UN MOVIMIENTO MÁS COMPLICADO QUE EL RECTILÍNEO

Tanto en la naturaleza, como en la técnica a menudo se tropieza con movimientos, cuyas trayectorias no son líneas rectas, sino curvas. Semejantes movimientos reciben el nombre de CURVILÍNEOS. Por trayectorias curvilíneas se mueven en el espacio sideral los planetas y los satélites artificiales, mientras que en la Tierra, toda clase de medios de transporte, elementos de las máquinas y mecanismos, el agua de los ríos, el aire de la atmósfera, etc.

Para el movimiento curvilíneo la resolución de los problemas de mecánica presenta mayores dificultades, ya que dicho movimiento es más complicado. Durante este movimiento, ya no podemos decir que sólo varía una coordenada del cuerpo. Por ejemplo, si el movimiento transcurre en el plano, como se infiere de la fig. 50, varían dos coordenadas: x e y. La dirección del movimiento, o sea, el sentido del vector de velocidad, también varía constantemente. Asimismo cambia la dirección del vector de aceleración. Si a esto añadimos que además pueden variar los módulos de la velocidad y la aceleración, quedará claro hasta qué grado el movimiento curvilíneo es más complicado que el rectilíneo.

Como para resolver los problemas de mecánica es de suma importancia saber calcular los valores de la velocidad y aceleración, debemos, ante todo, aclarar cómo varían estas magnitudes.

3.1. Desplazamiento, velocidad y aceleración cuando el movimiento es curvilíneo

Como ya sabemos, durante el movimiento rectilíneo, la dirección del vector de velocidad, siempre coincide con la dirección del desplazamiento. ¿Qué podemos decir sobre la dirección de la velocidad y el desplazamiento en caso de movimiento curvilíneo? Con el fin de responder a esta pregunta, haremos uso del mismo procedimiento que

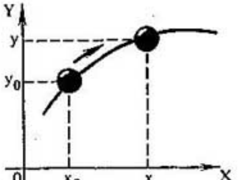


Fig. 50

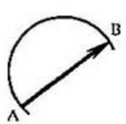


Fig. 51

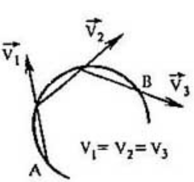


Fig. 52

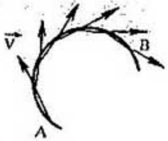


Fig. 53

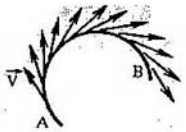


Fig. 54

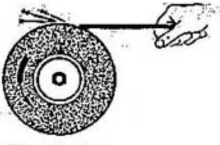


Fig. 55

empleamos en el anterior capítulo, cuando hablábamos sobre la velocidad instantánea del movimiento rectilíneo.

DESPLAZAMIENTO POR LAS CUERDAS. En la fig. 51 viene representada cierta trayectoria curvilínea. Supongamos que el cuerpo se mueve por ella del punto A al punto B. Con ello, el espacio recorrido por el cuerpo será el arco $\overset{\frown}{AB}$, mientras que su desplazamiento será el vector $\overline{AB}$. Desde luego que no podemos considerar que durante el movimiento la velocidad del cuerpo está dirigida a lo largo del vector de desplazamiento. Tracemos entre los puntos A y B una serie de cuerdas (fig. 52) e imaginémonos que el movimiento del cuerpo transcurre, precisamente, por esas cuerdas. En cada una de ellas el cuerpo posee movimiento rectilíneo y el vector de velocidad $\vec{v}$ se dirige a lo largo de la cuerda.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA POR LA TANGENTE. Hagamos nuestros sectores rectilíneos (cuerdas) más cortos (fig. 53). Como antes, en cada uno de ellos, el vector de velocidad está dirigido a lo largo de la cuerda. Pero vemos que esta quebrada ya se parece más a una curva suave.

Es evidente que si seguimos disminuyendo la longitud de los sectores rectilíneos, éstos, como si dijéramos, se concentrarán en puntos y la quebrada se convertirá en una curva suave. En lo que se refiere a la velocidad en cada punto de esta curva resultará dirigida por la tangente a ésta en dicho punto (fig. 54).

La velocidad del movimiento de un cuerpo en cualquier punto de la trayectoria curvilínea está dirigida por la tangente a la trayectoria en este punto.

Podemos cerciorarnos de que la velocidad de un punto cuando el movimiento es curvilíneo va en realidad dirigida por la tengente si observamos el trabajo de una piedra de afilar (fig. 55). Si apretamos contra ésta en rotación los extremos de una barra de acero, las partículas incandescentes, que se desprenden de la piedra, aparecerán en forma de chispas. Dichas partículas vuelan a la velocidad que tenían cuando se desprendieron de la piedra. Vemos bien que la dirección de vuelo de las chispas siempre coincide con la tangente a la circunferencia en aquel punto donde la barra hace contacto con la piedra. Por la

Fig. 56

Fig. 57

Fig. 58

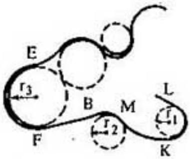


Fig. 59

tangente a la circunferencia se mueven también las salpicaduras de las ruedas de un automóvil que patina (fig. 56).

Así pues, la velocidad instantánea del cuerpo en distintos puntos de la trayectoria curvilínea tiene diferentes direcciones, como se muestra en la fig. 57. En lo que respecta al módulo de la velocidad, éste puede ser bien igual en todo lugar (véase la fig. 57), o bien variar de un punto a otro (fig. 58).

Pero incluso en el caso, cuando el módulo de la velocidad no varía, de todos modos no podemos considerarla constante, ya que la velocidad es una magnitud vectorial. Y, como sabemos, para tales magnitudes el módulo y la dirección son igualmente importantes. Por esta razón, *el movimiento curvilíneo es siempre variado*, incluso cuando el módulo de la velocidad es constante.

Durante el movimiento curvilíneo, pueden variar el módulo de la velocidad y su dirección. Aquí nos limitaremos a estudiar tan sólo el movimiento curvilíneo en el cual el módulo de la velocidad permanece constante. Semejante movimiento se denomina CURVILÍNEO UNIFORME. La aceleración en este movimiento sólo queda relacionada con el cambio de la dirección del vector de velocidad. ¿Cómo está dirigida y a qué es igual esta aceleración?

El movimiento curvilíneo transcurre por arcos de una circunferencia. Tanto el módulo, como la dirección de la aceleración deben depender de la forma de la trayectoria curvilínea. Pero no nos será preciso considerar cada una de las innumerables trayectorias curvilíneas.

En la fig. 59 se ofrece una complicada trayectoria, por la que se mueve un cuerpo.

En la figura vemos qué sectores aislados de la trayectoria curvilínea son, aproximadamente, arcos de las circunferencias representadas con líneas a trazos. Por ejemplo, los sectores *KL* y *BM* son arcos de circunferencias de pequeños radios, el sector *EF* es el arco de una circunferencia de radio grande.

De forma que el movimiento por cualquier trayectoria curvilínea puede ser representado, con aproximación, como el movimiento por arcos de ciertas circunferencias. Por lo tanto, el problema relacionado con la determinación de la aceleración, en caso de movimiento curvilíneo uniforme, se reduce al hallazgo de esta magnitud para el movimiento uniforme por una circunferencia.

¿ ?

1. ¿Cómo está dirigida la velocidad instantánea durante el movimiento curvilíneo?
2. ¿En qué difieren las variaciones de la velocidad para los movimientos curvilíneo y rectilíneo?
3. ¿Pueden coincidir las direcciones de la velocidad y de la aceleración en el movimiento curvilíneo?
4. ¿Puede un cuerpo moverse sin aceleración por una trayectoria curvilínea?

5. ¿Es posible el movimiento de un cuerpo a velocidad de módulo constante por una trayectoria en forma de quebrada?
6. ¿Qué relación existe entre los movimientos curvilíneo y por una circunferencia?

3.2. Movimiento sobre una circunferencia. Velocidad lineal y angular

ANGULO DE GIRO. Al describir el movimiento del cuerpo sobre una circunferencia se puede hacer uso del vector de desplazamiento, lo mismo que lo hicimos al describir el movimiento rectilíneo. Pero, con frecuencia, cuando el cuerpo (punto material) se mueve siguiendo una circunferencia, es más cómodo caracterizar la variación de su posición con ayuda de otra magnitud—*el ángulo de giro.*

Imaginémonos que cierto cuerpo se mueve describiendo una circunferencia de radio r (fig. 60). Tracemos del centro O de aquélla un radio hacia cualquier punto A del cuerpo y observemos no sólo el propio cuerpo, sino que también el radio trazado al punto A. Veremos que, a medida que el cuerpo se mueve, el radio gira. Si, por ejemplo, durante el intervalo de tiempo t, el cuerpo se desplaza del punto A al B, en este mismo intervalo el radio habrá barrido el ángulo φ, que llamaremos ÁNGULO DE GIRO DEL RADIO. Por consiguiente, sobre el movimiento del cuerpo podremos decir: primero, que durante el intervalo de tiempo t, el cuerpo recorrió un espacio l por el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia, segundo, que ha realizado el desplazamiento $\vec{s}$, cuyo módulo es igual a la largura de la cuerda $\overset{\frown}{AB}$ y, tercero, que el radio trazado al punto del cuerpo barrió el ángulo φ.

El ángulo de giro se puede expresar en grados. Pero, en muchos casos, es más cómodo hacer uso de otra unidad de medida de los ángulos—*radián*. Recordemos que RADIÁN (rad) se denomina el ángulo entre dos radios que limitan en la circunferencia un arco cuya longitud es igual al radio.

De la definición del radián se desprende

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ, \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 18',$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

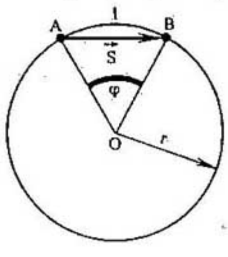


Fig. 60

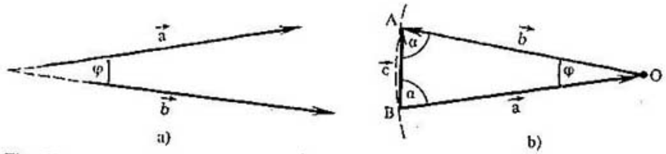


Fig. 61

Si expresamos el ángulo φ entre dos radios en radianes, la longitud l del arco, limitado por este ángulo en una circunferencia de radio r, será igual a

$$l = r\varphi. \tag{1}$$

CASO PARTICULAR DE LA DIFFERENCIA ENTRE VECTORES. Al resolver problemas físicos, a veces, es necesario hallar la DIFERENCIA entre dos vectores DE IGUAL LONGITUD, *el ángulo entre los cuales es muy pequeño* (próximo a cero). Hacer esto es cómodo cuando el ángulo está expresado en radianes.

En la fig. 61, *a* se muestran dos vectores de igual módulo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entre los cuales hay un pequeño ángulo φ. Designemos por $\vec{c}$ el vector diferencia: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Con el fin de hallar dicho vector, como sabemos (véase 1.4), hay que sumar el vector $\vec{a}$ al vector $-\vec{b}$. La correspondiente construcción se muestra en la fig. 61, *b*. En la figura vemos que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman un triángulo isósceles con pequeño ángulo en el vértice. Como la suma de los ángulos interiores del triángulo es igual a $2d$ y el ángulo φ es muy pequeño en comparación con estos ángulos, podemos considerar que $2d$ es igual a la suma de los dos ángulos α iguales en la base. Esto significa que el ángulo α es recto. Por lo tanto, *el vector diferencia de dos vectores de igual módulo, los cuales forman un pequeño ángulo, es perpendicular a cada uno de ellos.*

En esa misma figura podemos hallar con facilidad el módulo del vector $\vec{c}$. Del punto O, como del centro, trazamos una circunferencia cuyo radio es igual al módulo a del vector $\vec{a}$ o $\vec{b}$ (en la figura se muestra el arco $\widetilde{AB}$ de esta circunferencia). El vector $\vec{c}$ es la cuerda que cubre el arco $\widetilde{AB}$. De acuerdo con la fórmula (1) la longitud del arco $\widetilde{AB}$ es igual a $a\varphi$. Pero siendo el ángulo φ muy pequeño, la cuerda poco difiere del arco. Esto significa que la longitud de la cuerda (es decir, el módulo del vector $\vec{c}$) también es igual a $a\varphi$.
El módulo del vector diferencia de dos vectores de un mismo módulo con pequeño ángulo entre ellos es igual al producto del módulo de uno de estos vectores por dicho ángulo.

VELOCIDAD ANGULAR Y LINEAL. Más arriba hemos mostrado que el movimiento de un punto sobre una circunferencia puede ser caracterizado por el ángulo φ de giro del radio trazado hacia este punto. Durante el movimiento uniforme del punto por la circunferencia, los ángulos de giro del radio en iguales intervalos de tiempo serán idénticos. Dividiendo el ángulo de giro φ por el tiempo t, durante el que transcurre el giro, obtenemos la llamada VELOCIDAD ANGULAR de rotación de dicho radio. Por regla, se designa con la letra ω (letra griega "omega"):

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Para brevedad suele decirse que ω es la velocidad angular no del radio, sino que del propio punto.

Por velocidad angular de un punto en movimiento uniforme sobre una circunferencia se entiende la razón entre el ángulo de giro del radio, trazado a ese punto, y el intervalo de tiempo durante el que se ha realizado dicho giro[1].

Si el ángulo φ viene expresado en radianes y el tiempo t en segundos, la velocidad angular ω se expresará en RADIANES POR SEGUNDO (rad/s).

A diferencia de la angular ω, la velocidad v definida como la razón entre la longitud l del espacio recorrido (magnitud escalar) y el correspondiente intervalo de tiempo t, recibe el nombre de VELOCIDAD LINEAL:

$$v = \frac{l}{t}.$$

Durante el movimiento uniforme sobre una circunferencia, la velocidad lineal v es igual al módulo de la velocidad instantánea (magnitud vectorial).

Entre la velocidad angular y lineal existe una sencilla relación. Si en la expresión $v = l/t$ ponemos en lugar de la longitud del arco el valor $l = r\varphi$, obtendremos:

$$v = \frac{r\varphi}{t} \text{ o bien } \underline{\overline{v = \omega r.}} \tag{2}$$

La velocidad de movimiento del cuerpo (punto) sobre una circunferencia a menudo también se expresa mediante el NÚMERO DE REVOLUCIONES POR UNIDAD DE TIEMPO. Es fácil ligar la velocidad angular con el número de revoluciones por unidad de tiempo. En efecto, durante una revolución, el radio barre un ángulo igual a 2π rad. Esto quiere decir, que al realizar durante la unidad de tiempo, por ejemplo n revoluciones, el radio girará un ángulo de $2\pi n$ rad. Por esta causa, la velocidad angular ω y el número de revoluciones n por unidad de tiempo, están enlazados por medio de la expresión

$$\omega = 2\pi n.$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo n recibe el nombre de FRECUENCIA DE ROTACIÓN. La magnitud inversa a la frecuencia, determina el tiempo durante el cual el cuerpo da una vuelta. Este tiempo denomínase PERÍODO DE ROTACIÓN y se designa con la letra T:

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

---

[1] Hablando en rigor, en la expresión $\omega = \frac{\varphi}{t}$, ω es la velocidad angular media en el tiempo t. Si el cuerpo se moviera sobre la circunferencia no uniformemente, habría que introducir el concepto de velocidad angular instantánea.

¿ ?

1. ¿A qué es igual el módulo de la diferencia de dos vectores de un mismo módulo que forman un pequeño ángulo?
2. ¿Qué es la velocidad angular? ¿En qué unidades se mide?
3. ¿Cómo están ligadas entre sí la velocidad angular y la lineal?
4. ¿Cómo están ligadas entre sí la velocidad angular y la frecuencia de rotación?
5. ¿Qué es el período de rotación? ¿Cómo está enlazado con la velocidad angular de rotación; con la velocidad lineal?

Ejercicios 9

1. Hallar el módulo de la diferencia de dos vectores de velocidad, cuyos módulos son los mismos e iguales a 15 m/s, si aquéllos forman entre sí un ángulo de 5°.
2. El módulo de la diferencia de dos vectores de desplazamiento, idénticos en módulo, es igual a 2 cm, el ángulo entre los vectores constituye 2°. Hallar el módulo de los propios vectores de desplazamiento.
3. Calcular la velocidad angular y lineal del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. El radio de la órbita de la Tierra se considera igual a 150 000 000 km.
4. ¿Cuál es la velocidad lineal del extremo de la aguja minutera en el reloj que posee la torre Spasskaya del Kremlin de Moscú, si la longitud de la aguja es de 3,5 m? Comparar la velocidad angular del extremo de dicha aguja con la correspondiente a la aguja de un reloj de pulsera.
5. Considerando que el tiempo de rotación de la Tierra alrededor de su eje es igual a 24 h, calcular las velocidades angular de rotación y la lineal de los puntos en la superficie terrestre. El radio de la Tierra se toma igual a 6400 km.

3.3. Aceleración en caso de movimiento uniforme de un cuerpo sobre una circunferencia

Ahora, retornemos a nuestro problema, es decir, a hallar la aceleración de un cuerpo (que consideramos punto material) en movimiento siguiendo una circunferencia a una velocidad constante según el módulo.

Como sabemos, la aceleración se define con ayuda de la fórmula

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t},$$

donde $\vec{v}_0$ es la velocidad del cuerpo en el momento inicial de tiempo; $\vec{v}$, su velocidad después del intervalo de tiempo t.

Designemos la variación de la velocidad $\vec{v} - \vec{v}_0$ por $\Delta\vec{v}$. Entonces

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{t}.$$

Supongamos que el cuerpo se mueve sobre una circunferencia de radio r y que en cierto momento de tiempo se halla en el punto A (fig. 62). ¿A qué es igual la aceleración en ese punto?

La velocidad $\vec{v}_0$ en el punto A está dirigida en el momento inicial de tiempo ($t = 0$) a lo largo de la tangente a la circunferencia en dicho punto. Al cabo de

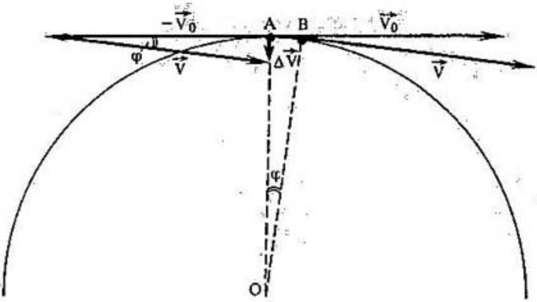


Fig. 62

que transcurra el intervalo de tiempo t, el cuerpo se encontrará en el punto B, pero ahora, su velocidad $\vec{v}$ estará dirigida por la tangente a este punto. Sin embargo, las velocidades $\vec{v}_0$ y $\vec{v}$ son iguales en módulo. Como tenemos que hallar la aceleración en el punto A, el punto B debe elegirse muy cerca del primero, de forma que el arco $\overset{\frown}{AB}$ tienda a concentrarse en un punto, mientras que el ángulo φ entre los radios OA y OB, trazados desde el centro de la circunferencia hacia los puntos A y B, sea muy pequeño (próximo a cero).

Dividiendo la diferencia de los vectores $\vec{v} - \vec{v}_0 = \Delta\vec{v}$ por t, obtenemos la aceleración $\vec{a}$. El vector $\Delta\vec{v}$ puede ser determinado sumando los vectores $-\vec{v}_0$ y $\vec{v}$ (véase la fig. 62).

¿CÓMO ESTÁN DIRIGIDOS LOS VECTORES DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN? El ángulo entre los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{v}$ es muy pequeño e igual al ángulo φ entre los radios OA y OB, ya que los lados de estos ángulos son perpendiculares. En el parágrafo anterior aclaramos que, siendo pequeño el ángulo φ entre los vectores, el vector diferencia es perpendicular a cada uno de ellos. En cuanto a su módulo es igual a $v\varphi$, donde v es el módulo de los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{v}$, así pues:

$$\Delta v = v\varphi.$$

Ya que $\vec{a} = \Delta\vec{v}/t$, la aceleración en el punto A (y, por consiguiente, también en cualquier otro punto de la circunferencia) va dirigida del mismo modo que el vector $\Delta\vec{v}$. Esto quiere decir que la aceleración de un punto, en movimiento uniforme sobre una circunferencia, también está dirigida de manera perpendicular al vector de velocidad en ese punto, o sea, su dirección coincide con la del radio hacia el centro de la circunferencia. Por esta causa, recibe el nombre de ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

Para el caso de movimiento uniforme de un cuerpo sobre una circunferencia, la aceleración en cualesquiera de sus puntos es centrípeta, es decir, está dirigida perpendicularmente a la velocidad de movimiento a lo largo del radio de la circunferencia hacia su centro.

En la fig. 63 se muestra esta particularidad de la aceleración de un cuerpo (punto) durante su movimiento uniforme describiendo una circunferencia.

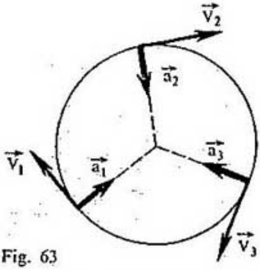


Fig. 63

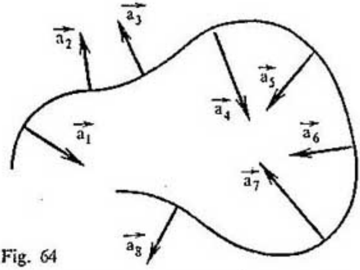


Fig. 64

¿A QUÉ ES IGUAL EL MÓDULO DE LA ACELERACIÓN? El valor del módulo de la aceleración centrípeta a será hallado al dividir $\Delta v = v\varphi$ por el tiempo t:

$$a = \frac{v\varphi}{t}.$$

De la fórmula (1) del parágrafo anterior se desprende que

$$\varphi = \frac{l}{r},$$

por lo que

$$a = \frac{v}{r} \cdot \frac{l}{t}.$$

Pero por definición

$$\frac{l}{t} = v,$$

o sea,

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}.} \qquad (1)$$

En caso de movimiento uniforme sobre una circunferencia, un cuerpo se mueve con aceleración, cuyo módulo es igual a v^2/r, y que está dirigida por el radio de la circunferencia hacia el centro.

La aceleración centrípeta puede ser también expresada por la velocidad angular ω. En efecto, sabemos que $v = \omega r$. Poniendo este valor de v en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\boxed{a = \omega^2 r.} \qquad (2)$$

Recordemos que la aceleración durante el movimiento uniforme sobre una circunferencia nos interesa, ya que podemos representar todo movimiento a lo largo de una trayectoria curvilínea como un movimiento por arcos de circunferencias de diversos radios.

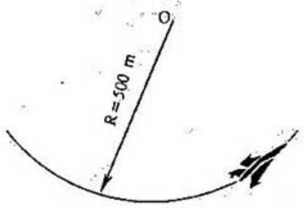


Fig. 65

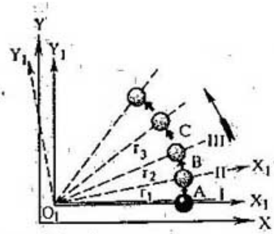


Fig. 66

Ahora, ya podemos decir que siendo el movimiento uniforme, en cualquier punto de una trayectoria curvilínea, el cuerpo se mueve con aceleración dirigida al centro de aquella circunferencia de la que es parte el sector de la trayectoria próxima a dicho punto. En lo que atañe al módulo de la aceleración, éste depende de la velocidad del cuerpo en dicho punto y del radio de la correspondiente circunferencia. La fig. 64 ofrece cierta trayectoria complicada y se indican los vectores de la aceleración centrípeta en diferentes puntos de aquélla.

PROBLEMA. Un avión, al salir del picado, se mueve por una trayectoria que en su parte inferior es el arco de una circunferencia de 500 m de radio (fig. 65). Calcular la aceleración del avión en el punto más bajo, si su velocidad es de 800 km/h, y comparar el resultado con la aceleración de la caída libre.

Solución. La aceleración del avión se calcula por la fórmula $a = v^2/r$.

Poniendo en ella los valores numéricos de

$$v = \frac{800 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 222 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ y } r = 500 \text{ m},$$

obtenemos:

$$a = \frac{\left(222 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{500 \text{ m}} = 98{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Como

$$g = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ resulta que } a \approx 10 \text{ g}.$$

¿ ?

1. ¿Cómo está dirigida la aceleración de un cuerpo que se mueve sobre una circunferencia a velocidad constante según el módulo? ¿A qué es igual el módulo de esta aceleración?
2. Si durante el movimiento de un cuerpo siguiendo una circunferencia el módulo de la velocidad varía, ¿estará dirigida la aceleración del cuerpo hacia el centro de la circunferencia?
3. ¿Podemos considerar el movimiento sobre una circunferencia con aceleración constante según el módulo como movimiento uniformemente variado?

4. ¿Por qué en las curvas de pequeño radio los chóferes de los automóviles disminuyen la velocidad?
5. Una lancha motora que arrastra a un deportista sobre esquí acuático se mueve por una circunferencia. El deportista puede seguir la lancha por la misma circunferencia que ella, pero puede hacerlo fuera y dentro de ella. ¿Cuál es la correlación de velocidades (lineales) del deportista en esos tres casos?

Ejercicios 10

1. Una piedra de afilar, cuyo radio es igual a 10 cm, durante su rotación da una vuelta cada 0,2 s. Hallar la velocidad de los puntos más alejados del eje de rotación.
2. Un automóvil se mueve por una curva de la carretera de 100 m de radio a una velocidad de 54 km/h. Definir la aceleración centrípeta del automóvil.
3. El periodo de rotación de la primera nave satélite "Vostok" alrededor de la Tierra era igual a 90 min. Su altura media sobre la Tierra puede ser considerada igual a 320 km. El radio de la Tierra es de 6400 km. Calcular la velocidad de la nave.
4. ¿Cuál será la velocidad de movimiento de un automóvil, cuyas ruedas de 30 cm de radio hacen 10 revoluciones en 1 s?
5. Dos poleas, cuyos radios son $r_1 = 5$ cm y $r_2 = 10$ cm, están unidas mediante una correa sin fin. El periodo de rotación de la polea de menor radio es igual a 0,5 s. ¿Cuál será la velocidad de desplazamiento de los puntos de la correa? ¿Cuál será el periodo de rotación de la segunda polea?
6. La Luna se mueve alrededor de la Tierra, distando de ésta 384 000 km y dando una vuelta durante 27,3 días. Calcular la aceleración centrípeta de la Luna.

3.4. Sobre la relatividad del movimiento de un cuerpo al girar el sistema de referencia

En los 1.8 y 1.9 ya hemos hablado de la relatividad del movimiento cuando los cuerpos se mueven de modo rectilíneo y uniforme. Pudimos apreciar, que los movimientos de un mismo cuerpo en relación unos respecto de otros, pueden diferenciarse considerablemente.

Pero también pueden ser de referencia cuerpos en rotación. Para nosotros, el ejemplo más evidente es la Tierra que gira alrededor de su eje a una velocidad, en realidad pequeña, de 1 vuelta por día ($\omega \approx 7 \cdot 10^{-5}$ rad/s). Como cuerpo de referencia podemos asimismo tomar un tiovivo en rotación y un satélite de la Tierra en su órbita, etc.

Examinemos como ejemplo el movimiento de una bola (o anillo) asentado sobre una barrita (aguja) que gira en el plano horizontal alrededor de uno de sus extremos. Semejante experimento puede hacerse en casa. Un anillo de alambre se asienta en una aguja para hacer punto y, sujetando uno de sus extremos en la mano, la primera se hace girar con rapidez a cierto ángulo en el plano horizontal. Con ello, el anillo se desprenderá de la aguja. ¿Cómo podemos explicar esto?

Enlacemos el sistema inmóvil de coordenadas con el plano horizontal (sistema XOY), mientras que el sistema móvil, con la barrita en rotación ($X_1O_1Y_1$) (fig. 66).

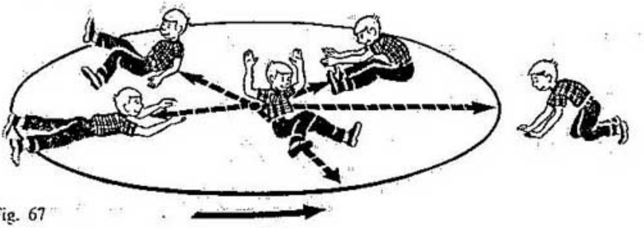


Fig. 67

En el momento en que la barrita se encuentra en la posición I y la bola en la barrita ocupa la posición del punto A, distando r_1 del punto O_1, la primera transmite a la bola la velocidad $\vec{v}_A$, que *es perpendicular* a aquélla. La bola se desplaza en dicha dirección. Al cabo de un pequeño intervalo de tiempo, la barrita efectúa una pequeña vuelta y ocupa la posición II, mientras que la bola, que no está fijada en la barrita, pasará al punto B, distando r_2 del punto O_1. Como vemos en la fig. 66, O_1B es la hipotenusa del triángulo AO_1B, en tanto que O_1A, su cateto. De forma que $r_2 > r_1$, o sea, la bola se ha alejado del centro de rotación. En este momento, la barrita comunica a la bola la velocidad $\vec{v}_B$ en la dirección perpendicular a la barrita y, cuando ésta, después de realizar una vuelta pequeña más, ocupe la posición III, la bola se hallará en la posición C, a una distancia r_3 que es mayor que r_2. La rotación de la barrita está constituida por dichas pequeñas vueltas. En lo que a la bola atañe cada vez se aleja más del punto O_1, deslizándose a lo largo de la barrita. Respecto del sistema inmóvil de referencia, la bola se mueve describiendo una complicada trayectoria en forma de una espiral que se desenrolla. Al mismo tiempo, *en relación con la barrita* (eje X_1) *la bola se mueve a lo largo de ella por una recta.*

Pasa aproximadamente lo mismo con los niños que se encuentran en un disco que gira alrededor de un eje vertical (fig. 67). Los niños se deslizan *por líneas rectas* hacia los bordes del disco. Un observador inmóvil, situado fuera del disco, verá que cada uno de los niños se mueve por una espiral que se desenrolla.

Lo más importante en el tercer capítulo

En caso de movimiento curvilíneo, la dirección del vector de velocidad varía constantemente y en cada punto de la trayectoria está dirigido por la tangente a ésta en el punto dado. Por esta razón, incluso el movimiento uniforme a lo largo de una trayectoria curvilínea, para el cual el módulo de la velocidad es constante, resulta ser un movimiento acelerado.

El movimiento de un cuerpo (punto material) sobre una circunferencia, no sólo puede ser descrito mediante magnitudes lineales, es decir, el desplazamiento y la velocidad, sino que también recurriendo a magnitudes angulares, a saber: el ángulo de giro φ del radio, trazado desde el centro de la circunferencia hacia el cuerpo, y la velocidad angular ω. La relación entre la velocidad lineal y la angular se expresa con la fórmula

$$v = \omega r,$$

donde r es el radio de la circunferencia.

Siendo el movimiento uniforme sobre una circunferencia, el vector de aceleración en cualquier punto de aquélla es perpendicular al vector de velocidad y se dirige al centro de la circunferencia. El módulo del vector de la aceleración centrípeta se expresa por la igualdad

$$a = v\omega = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Respecto de una barrita (eje) en rotación, un cuerpo (punto) no fijado en ella se mueve a lo largo de la barrita en dirección opuesta al eje de rotación.

Fundamentos de dinámica

4 LEYES DE MOVIMIENTO

LA MÁS IMPORTANTE PREGUNTA, ¿POR QUÉ?

En la parte dedicada a la "Cinemática" hemos estudiado las magnitudes que se emplean para describir diversos movimientos que se observan en el mundo que nos rodea. También hemos aprendido que para calcular las velocidades de los cuerpos, sus desplazamientos y, por último, las coordenadas de los mismos, en todo momento de tiempo, hay que conocer la aceleración, ya que precisamente ésta, es lo que diferencia un movimiento de otro. Por ejemplo, el movimiento rectilíneo uniforme se distingue de los demás, en que posee aceleración nula; el movimiento rectilíneo uniformemente variado, en que su aceleración es constante en módulo y dirección; el movimiento rectilíneo sobre una circunferencia, en que en cualquier punto de ésta la aceleración tiene dirección hacia su centro, etc.

Los movimientos de los cuerpos (respecto del sistema elegido de referencia) tienen comienzo y final, pueden ser más rápidos y más lentos, varían sus direcciones. En todos estos casos varían las velocidades, es decir, surgen aceleraciones. Por eso, es comprensible cuán importante es saber hallar (calcular) esta magnitud. Sin saber esto resulta imposible resolver los problemas de mecánica y controlar el movimiento. Pero para definir las aceleraciones, hay que conocer por qué y cómo surgen éstas. La física, en general, siempre tiende a aclarar no sólo CÓMO sucede uno u otro fenómeno, sino que también, POR QUÉ éste se produce y además transcurre así y no de otra manera. En cinemática aclaramos CÓMO transcurre el movimiento (por ejemplo, con o sin aceleración). A la pregunta POR QUÉ los cuerpos se mueven de tal o cual forma y no de otra, responde la parte principal de la mecánica – la llamada DINÁMICA.

Lo mismo que en cinemática, en dinámica introduciremos magnitudes singulares que son necesarias para calcular las aceleraciones, es decir, las denominadas magnitudes DINÁMICAS.

4.1. Los cuerpos y lo que los rodea. Primera ley de Newton

Con el fin de hallar la causa del surgimiento de las aceleraciones, hay que dirigirse a la práctica, a las observaciones. Para empezar, aclararemos bajo qué condiciones el cuerpo se

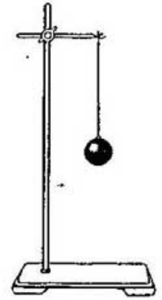


Fig. 68

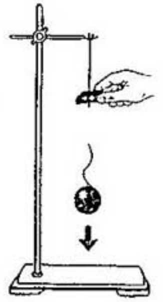


Fig. 69

mueve sin aceleración, es decir, cuando su velocidad no varía con el tiempo.

Todo cuerpo, en movimiento o en reposo, no existe a solas en el mundo. A su alrededor hay otros muchos cuerpos, cercanos y lejanos, grandes y pequeños, en movimiento o en reposo. Es natural que supongamos que algunos de ellos y, posiblemente todos, actúan de alguna forma sobre el cuerpo que observamos, de cierto modo ejercen influencia sobre el estado de su movimiento. De antemano no se puede decir cuáles de los cuerpos que lo rodean influyen de manera considerable y cuáles, poco inciden sobre dicho estado. En cada caso por separado a esto debemos dedicar una investigación.

Para empezar, examinemos cierto cuerpo en reposo. Tanto la velocidad, como la aceleración de dicho cuerpo son nulas.

En la fig. 68 se ofrece una bolita colgada de un cordón de goma. Respecto de la Tierra ella está en reposo. En las proximidades de la bolita hay gran cantidad de diversos cuerpos: el cordón, del que está colgada, las paredes de la habitación, multitud de objetos en ella y en los locales vecinos y, claro está, la Tierra. Es natural, que no todos estos cuerpos actúan de la misma manera sobre la bolita. Por ejemplo, si sacamos los muebles de la habitación o los mudamos de lugar en ella, esto no causará notoria influencia sobre la bolita. Pero si cortamos el cordón (fig. 69), la bolita comenzará a caer de inmediato con aceleración.

Es bien conocido, que precisamente bajo la influencia de la Tierra todos los cuerpos caen sobre ella. Pero mientras no sea cortado el cordón, la bolita se encontrará en reposo. Este sencillo experimento muestra que de todos los cuerpos que rodean la bolita, sólo dos influyen notoriamente sobre ella: el cordón de goma y la Tierra, su influencia conjunta asegura el estado de reposo de la bolita. Resultó suficiente eliminar uno de dichos cuerpos – el cordón, y dicho estado se alteró.

Si conservando el influjo del cordón alargado pudiéramos retirar... la Tierra, esta acción también perturbaría el reposo de la bolita: ésta comenzaría a moverse en dirección opuesta.

Lo dicho nos conduce a la conclusión de que los influjos de dos cuerpos, el cordón y la Tierra, sobre la bolita *se compensan* (a veces dicen, *se equilibran*) entre sí.

Fig. 70

Cuando decimos que las influencias de dos o varios cuerpos se compensan entre sí, esto quiere decir, que el resultado de su influencia conjunta es el mismo que tendría lugar si dichos cuerpos no existieran.

El ejemplo que hemos examinado y otros muchos semejantes, permiten llegar a la siguiente conclusión: *un cuerpo se encuentra en reposo si los influjos de otros cuerpos sobre él se compensan.*

Pero ya sabemos, que el movimiento y el reposo son relativos. Si respecto de un sistema de referencia el cuerpo se encuentra en reposo, en relación con otros, el mismo puede estar en movimiento. Por ejemplo, consideremos un puck (disco plano de caucho prensado) situado sobre el hielo de una pista de hockey (fig. 70). El puck está en reposo respecto de la Tierra, porque la influencia de ésta sobre él es compensada por el hielo. Pero para el deportista en movimiento a velocidad constante $\vec{v}$ con relación a la Tierra y, por lo tanto, al puck, éste se mueve en dirección opuesta al primero a la velocidad $-\vec{v}$. En el sistema de referencia relacionado con el deportista en movimiento, el del puck es rectilíneo y uniforme.

Pero he aquí que el deportista golpea el puck mediante el stick. Como resultado de la corta acción de éste, el primero se pone en movimiento y adquiere cierta velocidad. Es notable que después del golpe, cuando el influjo del stick sobre el puck ya ha cesado, éste continúa su movimiento. Entretanto, después del golpe, la influencia de los demás cuerpos sobre el puck sigue siendo la misma que antes del golpe: lo mismo que antes el efecto de la Tierra se compensa por el del hielo, en tanto que el stick, al igual que antes del golpe, de ninguna manera influye sobre el movimiento del puck. En lo que a éste atañe, después del golpe se mueve por una recta a la velocidad casi constante que adquirió en el momento del golpe. Bien es verdad que, a fin de cuentas, el puck se parará, pero como la práctica lo corrobora, cuanto más lisos sean el hielo y el puck, tanto más prolongado será el movimiento de éste. Por eso, podemos suponer que si pudiéramos liquidar por completo el influjo del hielo sobre el puck en movimiento, llamado rozamiento, dicho puck continuaría avanzando a velocidad constante, sin pararse, respecto de la Tierra.

SISTEMAS INERCIALES DE REFERENCIA. Así pues, vemos que si la influencia que ejercen sobre un cuerpo los que lo rodean se compensa, éste, con relación a la Tierra, se encuentra en reposo o está en movimiento rectilíneo uniforme.

Esta afirmación es justa, pero no para todos los sistemas de referencia. Por ejemplo, con relación al jugador de hockey que emprende un ataque, por lo que se mueve respecto de la Tierra con cierta aceleración, el puck también se encuentra en movimiento variado. Aunque, claro está, este jugador nos dirá que el efecto de la Tierra y del hielo sobre el puck se compensan entre sí.

De esta forma llegamos a una de las leyes fundamentales de mecánica que recibe el nombre de PRIMERA LEY DE NEWTON.

Existen tales sistemas de referencia con relación a los cuales los cuerpos en movimiento de traslación conservan su velocidad constante si sobre ellos no actúan otros cuerpos (o si la acción de éstos se compensa).

El propio fenómeno de conservación de la velocidad de movimiento de un cuerpo (incluyendo el estado de reposo), cuando los influjos exteriores sobre el mismo están compensados, es llamado INERCIA. Por esta causa, la primera ley de Newton se denomina con frecuencia PRINCIPIO DE INERCIA.

Reciben el nombre de sistemas inerciales de referencia aquellos respecto de los cuales un cuerpo está en movimiento uniforme y rectilíneo, cuando los efectos exteriores se compensan.

En el ejemplo del puck para jugar al hockey que hemos examinado, como sistemas inerciales de referencia figuran el que está relacionado con la Tierra y el que está ligado con el jugador, que respecto de ésta avanza en movimiento uniforme y rectilíneo. Pero no sólo ellos. Está claro, que también será inercial cualquier sistema de referencia en movimiento rectilíneo y uniforme, respecto a la Tierra.

Así pues, *si de la práctica conocemos aunque tan sólo sea un sistema inercial de referencia, serán también inerciales cualesquiera otros sistemas de referencia que en relación con el primero están en movimiento rectilíneo y uniforme.*

En lo sucesivo, sólo haremos uso de sistemas inerciales de referencia.

El principio de inercia no es tan evidente como parece a primera vista. Su descubrimiento puso fin a una antiquísima equivocación. Hasta entonces, durante siglos, se consideraba que al no haber influjos exteriores sobre el cuerpo (o al compensarse todos éstos, lo que es lo mismo), él sólo puede estar en reposo, ya que este último es, como si dijéramos, el estado natural del cuerpo. En cuanto al movimiento del cuerpo a velocidad constante, se consideraba que era preciso que sobre él actuase otro cuerpo de forma permanente. Parecía que lo dicho era confirmado por la experiencia cotidiana: con el fin de que un carro se moviera a velocidad constante, de éste debía tirar el caballo; para que una mesa se mueva por el suelo, es preciso tirar de ella o empujarla constantemente, etc.

El gran sabio italiano GALILEO GALILEI fue el primero en indicar que lo expuesto era erróneo y que, al no haber efectos exteriores, el cuerpo no sólo puede estar en reposo, sino que también en movimiento rectilíneo y uniforme. Es decir, que dicho movimiento es un estado tan "natural" de los cuerpos, como el reposo. Y si para que la mesa se mueva hay que tirar de ella o empujarla, esto se explica por el hecho de que, durante su movimiento, el suelo no sólo compensa la acción de la Tierra, sino que además crea un influjo adicional sobre la mesa, llamado rozamiento. La acción de aquellos que tiran o empujan la mesa es necesaria para compensar el rozamiento. Galileo llegó a la deducción de que, si no hubiera rozamiento, el cuerpo (la mesa) después de puesto en movimiento continuaría éste a velocidad constante incluso sin que actúen influjos exteriores.

El genial físico inglés ISAAC NEWTON generalizó las deducciones de Galiley, las incluyó en las leyes fundamentales de movimiento.

¿ ?

1. Unos remadores intentan que la barca avance contra corriente, no lo consiguen, quedando la barca en reposo con relación a la orilla. ¿Las acciones de qué cuerpos sobre la barca se compensan en este caso?
2. ¿En qué consiste el fenómeno de inercia?
3. ¿En qué consiste la primera ley de Newton?
4. Sobre la mesa para jugar al ping-pong descansa una pelota. Alguien desplaza la mesa y la pelota se pone en movimiento. Indicar el cuerpo de referencia respecto del cual es justo en este caso la ley de inercia y el cuerpo de referencia, con relación al cual dicha ley no se cumple.

Tareas

1. Aducir ejemplos de cuerpos que se encuentran en reposo. ¿Las acciones de qué cuerpos se compensan en estos casos?
2. Dar ejemplos de cuerpos en movimiento rectilíneo y uniforme. Indicar los cuerpos, cuyas acciones se compensan en este caso.

4.2. Interacción de los cuerpos. Aceleración de los cuerpos durante su interacción

De acuerdo con la primera ley de Newton, un cuerpo está en movimiento sin aceleración, es decir, rectilíneo y uniforme con relación al sistema inercial de referencia, si sobre el cuerpo no actúan otros cuerpos o bien si actúan sus influjos que están compensados.

Aclaremos ahora bajo qué condiciones los cuerpos se mueven con aceleración. La experiencia muestra que, cuando un cuerpo está en movimiento con aceleración, siempre puede ser indicado uno o varios otros cuerpos, cuya influencia provocó la aceleración. Por ejemplo, los cuerpos que caen libremente, se mueven con aceleración. El cuerpo que provoca ésta, es la Tierra. El puck que se encontraba en el hielo varió su velocidad después del golpe. El cuerpo que comunicó al puck la aceleración fue el stick.

Acerquemos a una bolita de hierro una barra de acero imantada (imán). La bolita, que hasta el momento estaba en reposo, comienza a moverse con aceleración (fig. 71), provocada por la acción del imán. Mientras actúe el imán, la bolita se moverá con aceleración, aumentando su velocidad constantemente.

Si acercamos el imán a la bolita en movimiento de la forma que se muestra en la fig. 72, variará la *dirección* de su velocidad: la trayectoria de la bolita se encorvará. Como ya sabemos, esto significa que la bolita ha adquirido aceleración centrípeta. En este experimento vemos de nuevo que la influencia de la acción de un cuerpo exterior es la causa de la variación del movimiento y no del propio movimiento. ¡Pues la bolita se movía antes de que acercáramos el imán!

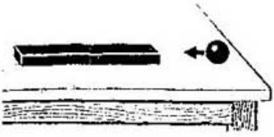


Fig. 71

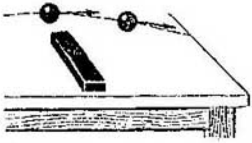


Fig. 72

De forma que *la causa de la aceleración del cuerpo es la influencia de otros cuerpos sobre él.*

¿De qué depende el módulo y la dirección de la aceleración que se comunica a un cuerpo gracias a la influencia de otro cuerpo? Para hallar la respuesta a esta pregunta recurramos de nuevo a un experimento.

INTERACCIÓN DE LOS CUERPOS. En el caso más sencillo, en nuestro experimento deben participar dos cuerpos: aquel que influye y el que sufre dicha influencia.

Pero en la realidad, ambos cuerpos son, por así decirlo, "equivalentes". Cada uno de ellos influye sobre el otro cuerpo y se somete a la influencia. Por ejemplo, cuando un futbolista, corriendo a gran velocidad, choca con otro jugador, ambos cambian su velocidad.

En general, cada vez que cierto cuerpo A recibe aceleración a causa de que sobre él actúa el cuerpo B, este último también toma aceleración. Se produce la llamada INTERACCIÓN de los cuerpos y los dos toman aceleración. ¿Cuáles son estas aceleraciones?

Múltiples experimentos realizados con diversos cuerpos nos han mostrado que durante la *interacción* de dos cuerpos, *sus aceleraciones están dirigidas en direcciones opuestas*. Además, resulta que para dos cuerpos dados en interacción, la *razón de los módulos* de sus aceleraciones, es siempre la misma y no depende en absoluto de cómo transcurre la interacción de los cuerpos. Ésta puede ser el choque de dos cuerpos; la interacción de esos mismos cuerpos ligados con un muelle, hilo, alambre; por último, los cuerpos pueden estar en interacción sin entrar en contacto, como, por ejemplo, los planetas y el Sol o bien la Luna y la Tierra, el imán y un trozo de hierro. En lo que se refiere a los propios módulos de las aceleraciones de cada uno de los cuerpos pueden ser totalmente diferentes para distintas aceleraciones. Sólo es igual la razón de sus aceleraciones.

Por ejemplo, si tomáramos dos carritos del mismo tamaño, uno de aluminio y otro de acero (fig. 73) y los obligáramos a chocar, durante el impacto ambos

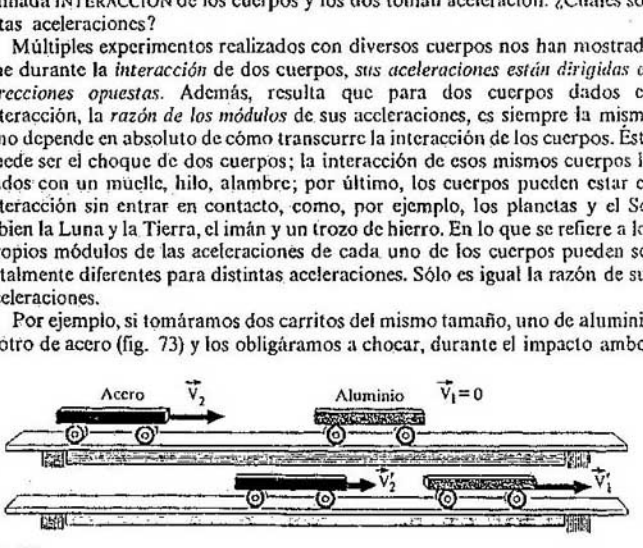


Fig. 73

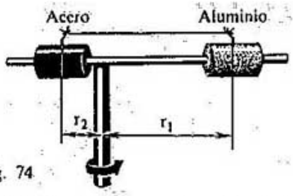


Fig. 74

variarían su velocidad, tomarían aceleración. Las mediciones nos mostrarían que la aceleración $\vec{a}_1$ del carrito de aluminio es tres veces mayor por su módulo que la aceleración $\vec{a}_2$ del de acero, independientemente de cuáles eran las velocidades de los carritos antes del choque

$$\frac{a_1}{a_2} = 3.$$

Las direcciones de la aceleración de ambos carritos serían opuestas.

Durante el choque de los carritos es muy difícil medir la aceleración, ya que aquél dura muy poco tiempo. Es mucho más sencillo realizar un experimento en el que los cuerpos en interacción están en movimiento uniforme sobre una circunferencia y medir la aceleración centrípeta de dichos cuerpos.

El esquema de semejante experimento viene representado en la fig. 74. Dos cilindros de igual tamaño – uno de aluminio y el otro de acero – que por el eje tienen un agujero, están asentados sobre una barra, a lo largo de la cual pueden deslizarse con pequeño rozamiento.

Instalemos la barra con los cilindros en una máquina centrífuga y pongámosla en rotación. De inmediato, los cilindros se deslizarán a los extremos de la barra (véase 3.4). En este experimento entre los cilindros no hay interacción.

Liguemos ahora los cilindros con un fino hilo y de nuevo hagamos girar la barra. En este caso, los cilindros actúan entre sí por medio del hilo que los liga.

Cuando los cilindros ocupen determinadas distancias hasta el eje de rotación de la barra, ellos dejarán de deslizarse por ésta y se moverán describiendo circunferencias. Los radios r_1 y r_2 de dichas circunferencias son las distancias entre los cilindros y el eje de rotación. Pero sobre la circunferencia el cuerpo se mueve con aceleración centrípeta, dirigida hacia el centro e igual a $\omega^2 r$, donde ω es la velocidad angular de rotación de la barra; r, el radio de la circunferencia. La razón entre los módulos de las aceleraciones de los cilindros de aluminio y de acero, por lo tanto, es igual a

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 r_1}{\omega^2 r_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Al medir los radios r_1 y r_2, observaremos que para el cilindro de aluminio el radio r_1 es tres veces mayor que el radio r_2 de la circunferencia por la que se mueve el cilindro de acero. Esto significa que la razón de las aceleraciones de los cilindros es igual a tres.

Se puede cambiar la longitud del hilo que liga los cilindros, así como variar la velocidad de rotación de la barra. Todo esto conduce a la variación de la aceleración de cada uno de los cilindros. Pero el experimento mostrará que la razón entre las aceleraciones queda igual a 3 en todo caso. De este modo, nos hemos cerciorado de que para cualquier interacción entre dos cuerpos dados la razón de los módulos de sus aceleraciones es siempre la misma.

¿ ?

1. ¿Qué es la causa de la aceleración?
2. ¿Qué se puede decir sobre las aceleraciones de dos cuerpos en interacción?
3. Como resultado de la interacción de dos cuerpos, la velocidad de uno de ellos aumentó. ¿Cómo varió la velocidad del otro cuerpo?

Ejercicios 11

1. Determinar la velocidad del carrito de aluminio del que hablábamos en este parágrafo, después de chocar con el carrito de acero, si la velocidad inicial de este último era igual a 4 m/s y después del choque, 2 m/s. El carrito de aluminio antes del choque estaba en reposo.
2. Los cilindros de aluminio y de acero, con los cuales se ha descrito un experimento en este parágrafo, están unidos con un hilo de 8 cm. ¿A qué distancia del centro de la barra se dispondrá cada uno de los cilindros?
3. En este mismo experimento con los cilindros de aluminio y acero, éstos fueron unidos con un hilo de otra longitud. Con ello, resultó que durante la rotación de la barra, el cilindro de aluminio se dispuso a una distancia de 9 cm del centro de la misma. ¿Cuál será la longitud del hilo?

Tarea

Aducir ejemplos que muestren que la interacción de los cuerpos es la causa de la variación del movimiento (velocidad) de éstos y no del propio movimiento.

4.3. Inertidad de los cuerpos

En el parágrafo anterior, hemos estudiado experimentos de los que se desprende que la razón de los módulos de las aceleraciones, adquiridas por dos cuerpos durante la interacción, no depende del procedimiento de aplicación o realización de ésta, sino que sólo de los propios cuerpos. Por consiguiente, cada cuerpo posee cierta propiedad singular que es la que determina la razón entre el módulo de su aceleración y el de la aceleración del cuerpo con el que se encuentra en interacción.

¿Cuál es esta propiedad?

Cuando un cuerpo se mueve sin aceleración, o sea, a velocidad invariable, se dice que aquél se mueve por inercia. Al producirse la interacción de los cuerpos, cada uno de ellos varía su velocidad. En los experimentos examinados en 4.2, vimos que las aceleraciones de los cuerpos en interacción son diferentes. Del hecho de que la aceleración de uno de los cuerpos resultó menor según su módulo que la del otro, puede llegarse a la conclusión de que en el mismo intervalo de tiempo, durante el que transcurre la interacción, uno de los cuerpos cambia menos su velocidad que el otro. Recordemos que la aceleración de un

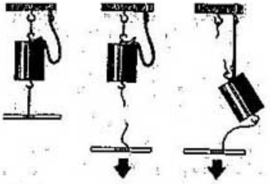


Fig. 75 a) b) c)

cuerpo es igual a la razón entre la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo t, en el cual se produjo dicha variación:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

Por eso, cuanto menor sea la aceleración del cuerpo, tanto en menor grado variará su velocidad en el transcurso del tiempo dado t.

Acerca del cuerpo que como resultado de la interacción varía menos su velocidad, suele decirse que es más inerte que el segundo, ya que si su velocidad no hubiera cambiado por completo, el cuerpo permanecería en movimiento por inercia, es decir, rectilínea y uniformemente.

La INERTIDAD es una propiedad inherente a todos los cuerpos. *Consiste en que para variar la velocidad del cuerpo se necesita cierto tiempo. Cuanto mayor sea éste, más inerte será el cuerpo.* De dos cuerpos en interacción, más inerte resulta el que varía su velocidad con más lentitud.

El siguiente experimento muestra con claridad cómo se manifiesta la inertidad de los cuerpos y qué función desempeña el tiempo en que un cuerpo actúa sobre otro.

Un cilindro (fig. 75, *a*) está suspendido de un fino hilo. A su parte inferior se ha fijado un hilo idéntico. Si damos un tirón brusco del hilo inferior, éste se rompe, mientras que el cilindro continúa suspendido del hilo (fig. 75,*b*). Pero si tensamos el hilo inferior con cuidado, se romperá el hilo superior y el cilindro caerá (fig. 75, *c*). Esto se explica por el hecho de que, al dar el tirón del hilo inferior, el tiempo de su acción sobre el cilindro resulta tan pequeño que éste no puede aumentar considerablemente su velocidad (no le da tiempo a adquirir velocidad) y realizar un desplazamiento notorio hacia abajo. Por esta razón, el hilo superior no se rompe. En lo que se refiere al hilo inferior, éste tiene pequeña inertidad y con el tirón adquiere una velocidad considerable, por lo que su desplazamiento es suficiente para su rotura. Cuando tensamos lentamente el hilo inferior, éste interactúa con el cilindro largo tiempo, durante el cual dicho cilindro tiene tiempo para alcanzar una velocidad tal que su desplazamiento es suficiente para romper el hilo superior, ya de por sí tensado en alto grado.

¿ ?

1. ¿Puede la velocidad de un cuerpo cambiar de forma instantánea?
2. ¿En qué consiste la propiedad de los cuerpos llamada inertidad?

Tarea

Aducir ejemplos que muestren que durante la interacción varía la velocidad de ambos cuerpos.

4.4. Primera magnitud dinámica: la masa de los cuerpos

La inertidad, cualidad inherente a cada cuerpo, es una de sus más importantes propiedades, ya que de ella depende la aceleración del cuerpo como resultado de su interacción con otros.

En física se estudian aquellas propiedades de los cuerpos que pueden ser caracterizadas por una determinada magnitud. Por ejemplo, la propiedad de los cuerpos de ocupar parte del espacio exprésase por su volumen. La propiedad de los cuerpos que hemos llamado inertidad, también queda carcterizada por una magnitud especial, denominada MASA.

Aquel de los cuerpos en interacción que adquiere menor aceleración según el módulo, es decir, que es más inerte, tiene mayor masa. Si designamos las masas de dichos cuerpos por m_1 y m_2, podemos suponer que

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{m_2}{m_1}. \qquad (1)$$

La razón de los módulos de las aceleraciones de dos cuerpos en interacción es igual a la razón inversa de sus masas.

Por ejemplo, hemos visto que la razón entre la aceleración de un cilindro de aluminio y la de otro de acero es igual a tres. El motivo de esto radica en que la masa del cilindro de aluminio es tres veces menor que la del de acero.

Así pues, ahora ya sabemos cómo hallar la razón de las masas de dos cuerpos. Para ello hay que medir sus aceleraciones durante la interacción. ¿Pero cómo definir la masa de cada cuerpo por separado? Aquí se obra del mismo modo que al medir otras magnitudes. Por ejemplo, para hallar el número que expresa la longitud del cuerpo, comparamos ésta con el patrón de longitud, es decir, el metro (véase la pág. 38). De esta misma manera se procede para determinar los valores numéricos de las masas: con el fin de hallar el número que expresa la masa de un cuerpo por separado, primero hay que elegir cierto cuerpo, cuya masa se toma convencionalmente por la unidad, o sea, el patrón de masa. A continuación, se efectúa un experimento; en él, el cuerpo, cuya masa definimos (medimos), debe estar de cierto modo en interacción con el patrón de masa (véase la fig. 74). En tal caso, ambos – el cuerpo y el patrón – reciben aceleraciones, que se pueden hallar a partir del experimento y podremos escribir la igualdad

$$\frac{a_p}{a_c}=\frac{m_c}{m_p},$$

o bien

$$m_c=\frac{a_p}{a_c}m_p, \qquad (2)$$

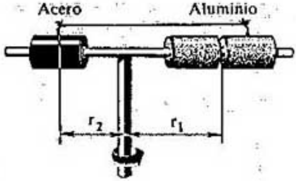


Fig. 76

donde m_c y a_c son la masa y el módulo de la aceleración del cuerpo; m_p y a_p, la masa y el módulo de la aceleración del patrón. Pero la masa del patrón es igual a la unidad, por lo que

$$m_c = \frac{a_p}{a_c} \quad \text{unidades de masa.}$$

La masa del cuerpo es la magnitud que expresa su inertidad. Determina la razón entre el módulo de la aceleración del patrón de masa y el módulo de la aceleración del cuerpo durante su interacción.

Recordemos (véase A. V. Piórishkin, N. A. Ródina. Física 1) que como patrón de masa está adoptado un cilindro de una aleación de platino e iridio, especialmente fabricado. La masa de este cilindro es la unidad internacional de masa, es decir, el KILOGRAMO (kg). Con suficiente precisión se puede considerar que 1 l de agua pura a 15°C tiene una masa de 1 kg.

Junto con tales magnitudes como la longitud y el tiempo, la masa figura entre las magnitudes fundamentales del SI.

No se debe pensar que cada vez, cuando hace falta medir la masa de cierto cuerpo, hay que someterlo a la interacción con el patrón de masa y determinar la aceleración de ambos. En la práctica, claro está, semejante procedimiento es incómodo. Por fortuna, existe otro método para medir la masa, el PESAJE, del que, por regla, se hace uso. Sobre este procedimiento de medición de la masa ya nos familiarizamos en el curso anterior de física. Pero en algunos casos, la definición de la masa ateniéndose a las aceleraciones durante la interacción es el único procedimiento posible. Por ejemplo, resulta imposible determinar por pesaje la masa de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes. Tampoco es posible medir en una báscula masas muy pequeñas, por ejemplo, las de los átomos y de las partículas de que él está constituido.

La masa de un cuerpo expresa una propiedad exclusiva (inertidad) inherente a éste, que no depende ni de las interacciones en las que el cuerpo actúa, ni de cómo él se mueve. Independientemente de dónde se encuentra el cuerpo, de cómo se mueve, su masa queda invariable.

LAS MASAS SE SUMAN. Conoceremos una interesante e importante propiedad de la masa si realizamos un experimento más (fig. 76). Unamos dos cilindros idénticos de aluminio y repitamos el experimento con la máquina centrífuga (véase 4.2). Ahora, el cilindro de acero entra en acción mutua no con uno, sino que con dos cilindros de aluminio unidos. El experimento mostrará que la razón entre la aceleración de estos últimos y la aceleración del cilindro de acero ya no es igual a 3, sino que a $^3/_2$. Esto significa que la masa de los dos cilindros idénticos unidos y que, por así decirlo, forman un cuerpo íntegro, es dos veces mayor que la masa de uno de ellos. Por lo tanto, *cuando dos o varios cuerpos se unen formando un todo único, sus masas se suman*. Esto sigue de la suposición que hemos adoptado acerca de que la razón de los módulos de las aceleraciones de cuerpos en interacción es igual a la razón inversa de sus masas (fórmula 1).

A causa de esta propiedad de la masa, a veces dicen que ésta expresa la cantidad de sustancia en el cuerpo. Está en absoluto claro que dos cilindros de aluminio contienen una cantidad dos veces mayor de éste que uno.

UNA VEZ MÁS SOBRE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD. Hemos señalado que la masa del cuerpo no depende de cómo éste se mueve. Pero esto no es del todo justo. En 1.9 se indicó que de acuerdo con la teoría de la relatividad en distintos sistemas de referencia, en movimiento unos respecto de otros, el tiempo transcurre de diferente forma. Esto conduce a asombrosas consecuencias. En particular, resulta que la masa del cuerpo varía durante su movimiento. Supongamos que la masa de cierto cuerpo *en reposo* es m_0. Si pudiéramos, por ejemplo, con una máquina centrífuga medir la masa de ese mismo cuerpo cuando se mueve a una velocidad $\vec{v}$, resultaría que aquélla no sería ya igual a m_0, sino que a

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde c es la velocidad de la luz. Por consiguiente, la masa del cuerpo resulta mayor. No obstante, este aumento de la masa es notorio sólo a velocidades próximas a la de la luz ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Los cuerpos corrientes nunca se mueven a semejantes velocidades. El cuerpo más rápido, con el que tropiezan los habitantes de nuestro planeta, es la propia Tierra, que alrededor del Sol se mueve a una velocidad de 30 km/s. A semejantes velocidades, podemos considerar que la masa es constante.

Como ejemplo que ilustra la comparación de las masas de los cuerpos, ateniéndose a sus aceleraciones durante la interacción, consideraremos el siguiente problema.

PROBLEMA. Comparar las masas de la Luna y la Tierra, si conocemos los radios de sus órbitas.

Solución. Por lo general, se considera que la Luna (bajo la influencia de la Tierra) gira a su alrededor, como si el centro de nuestro planeta fuese el centro inmóvil de la órbita lunar. Pero esto no puede ser así, ya que durante la interacción de los cuerpos, ambos adquieren aceleración. En la realidad, la Luna también influye sobre la Tierra, obligando a ésta a moverse por una circunferencia y comunicándole aceleración centrípeta. ¿Pero alrededor de qué centro?

Las observaciones astronómicas han mostrado que la Luna gira no alrededor del centro de la Tierra, sino que en torno de cierto punto P (fig. 77), que dista de dicho centro 4700 km. Alrededor de ese mismo punto P se mueve

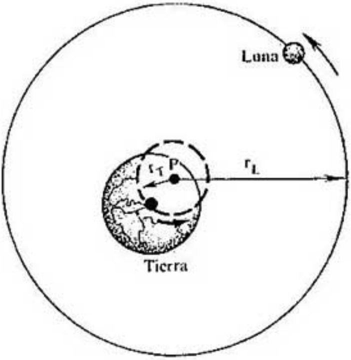


Fig. 77

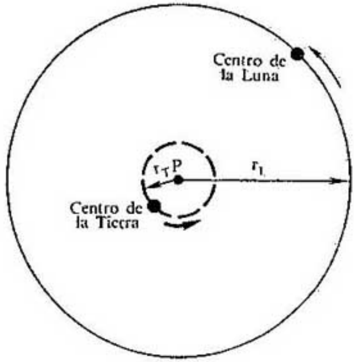


Fig. 78

asimismo, describiendo una circunferencia, el centro de la Tierra (fig. 78). O sea, los radios que unen los centros de la Tierra y de la Luna con el punto P se mueven a igual velocidad angular en torno de dicho punto. El centro de la Tierra está en movimiento sobre una circunferencia de radio $r_T \approx 4700$ km y el de la Luna, describiendo una circunferencia de radio $r_L \approx 380\,000$ km. De forma que el comportamiento de nuestro planeta y de su satélite es igual en absoluto al de los cilindros de aluminio y acero en el experimento examinado en 4.2. Allí, vimos que la razón entre los módulos de las aceleraciones centrípetas, comunicadas por los cilindros uno a otro, es igual a la razón de los radios de las circunferencias por las que se mueven. Por consiguiente, podemos escribir

$$\frac{a_L}{a_T} = \frac{\omega^2 r_L}{\omega^2 r_T} = \frac{r_L}{r_T}.$$

Pero la razón entre los módulos de las aceleraciones de los cuerpos en interacción es igual, como sabemos, a la razón inversa de las masas, por lo que

$$\frac{r_L}{r_T} = \frac{m_T}{m_L}.$$

Como $r_L \approx 380\,000$ km y $r_T \approx 4700$ km

$$\frac{m_T}{m_L} \approx \frac{380\,000}{4700} \approx 81.$$

¿ ?

1. ¿Qué magnitud es la que caracteriza la inertidad de un cuerpo?
2. ¿Qué ligazón existe entre las masas de los cuerpos y los módulos de las aceleraciones que ellos reciben durante la interacción?
3. ¿Cómo se determina la masa de un cuerpo aislado?
4. ¿Qué es el patrón de masa?

---

1. Un carrito se mueve por una superficie horizontal a una velocidad de 50 cm/s. Con él choca un segundo carrito en movimiento en la misma dirección a una velocidad de 150 cm/s. Después del choque, los dos carritos continúan el movimiento en la misma dirección a igual velocidad, igual a 100 cm/s. Hallar la razón de las masas de los carritos.
2. Un carrito se mueve por un plano horizontal a una velocidad de 30 cm/s y choca con otro carrito en reposo de la misma masa que el primero. Como resultado del choque el carrito en movimiento, se para. ¿A qué velocidad se moverá el otro carrito?

4.5. Segunda magnitud dinámica: la fuerza

Recordemos que nuestro objetivo consiste en conocer cómo calcular la aceleración de los cuerpos en movimiento, sin lo que es imposible resolver el problema fundamental de mecánica.

En los parágrafos anteriores, vimos que cuando cierto cuerpo *1*, cuya masa es igual a m_1, adquiere una aceleración $\vec{a}_1$, esto es el resultado de que sobre él actúa otro cuerpo *2* de masa m_2, que a su vez también recibe la aceleración $\vec{a}_2$. Con ello

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1} a_2.$$

De esta fórmula, al parecer se desprende que no se puede estudiar el movimiento y calcular la aceleración de sólo un cuerpo, que llamaremos cuerpo que se acelera. Obligatoriamente hay que conocer la masa y la aceleración de otro cuerpo más, el acelerador.

Mas, por regla, nos interesa, precisamente, el movimiento de uno de ellos, del cuerpo que se acelera y no del cuerpo o los cuerpos que sobre él actúan, comunicándole la aceleración. Por ejemplo, cuando un proyectil abandona el cañón, después del disparo, él está en interacción con la Tierra y el aire, por el que vuela. Tanto la una, como el otro, comunican aceleración al proyectil, pero ellos también toman ciertas aceleraciones. Sin embargo, para el artillero, es de importancia conocer sólo la aceleración del proyectil. ¿Para qué le pueden interesar de las masas y aceleraciones de la Tierra y el aire?

LA CAUSA DE LA ACELERACIÓN ES LA FUERZA. Por esa razón, generalmente calculan la aceleración sólo de un cuerpo, de aquel cuya velocidad se estudia. En tanto que *la influencia del otro cuerpo, causa que provoca la aceleración, se llama con brevedad fuerza que actúa sobre el cuerpo que se acelera.* Y en lugar de decir que la aceleración del cuerpo fue provocada por la influencia de otro cuerpo sobre él, decimos que *la aceleración fue provocada por la fuerza aplicada al cuerpo* (o que actúa sobre él).

Por ejemplo, es bien conocido que un cordón de goma o un muelle espiral estirados (fig. 79), al dejarlos libres se reducen y, al fin de cuentas, retornan a su estado inicial no alargado (fig. 80). Durante su reducción, todas las partes del muelle, salvo su extremo fijado, se mueven con aceleración dirigida a lo largo del eje. En la fig. 79 viene mostrada con una flecha la aceleración del extremo *B* del muelle. Esto significa que sobre todas las partes del muelle alargado,

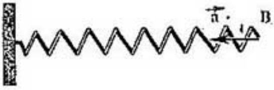


Fig. 79

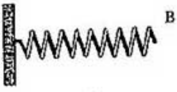


Fig. 80

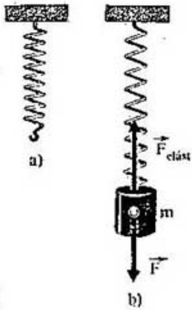


Fig. 81

incluido el extremo *B*, actúa una fuerza, que recibe el nombre de FUERZA ELÁSTICA del muelle. Cuando el muelle no está alargado, dicha fuerza es nula. De aquí se deduce que la fuerza elástica del muelle sólo depende de su alargamiento, es decir, de la disposición mutua de sus partes.

Si en el extremo de un muelle alargado o comprimido se fija un cuerpo, bajo la acción del muelle éste adquirirá aceleración, lo que quiere decir, que sobre el cuerpo actúa la fuerza elástica por parte del muelle alargado.

He aquí otro ejemplo. Como sabemos, todos los cuerpos en caída libre o lanzados hacia arriba, se mueven con aceleración. La causa de ésta es, por lo visto, la influencia que ejerce la Tierra. Pero ahora, debemos decir que sobre el cuerpo actúa una fuerza desde la Tierra que le comunica aceleración. Esta fuerza denomínase FUERZA DE LA GRAVEDAD.

LA FUERZA ES UNA MAGNITUD FÍSICA. La fuerza elástica y la de la gravedad como que no se pareciesen por completo. Esta falta de parecido se manifiesta aunque ya sea por el hecho de que el muelle actúa sobre el cuerpo con el que entra en contacto, mientras que la Tierra, sin semejante contacto. Mas estos dos influjos son similares en que ambos comunican a los cuerpos aceleración.

Una fuerza es capaz de comunicar a un cuerpo gran aceleración, otra – pequeña. Por consiguiente, la fuerza es una magnitud física que puede ser expresada con un número. Y no sólo con éste, ya que la fuerza es una magnitud vectorial, lo que se infiere, por ejemplo, en la fig. 81,*b*.

En ella se muestra una pesa suspendida de un muelle y que en esta posición se encuentra en reposo. Sobre la pesa actúa la fuerza de la gravedad $\vec{F}$. Además, en ella influye la fuerza elástica $\vec{F}_{elást}$, ya que el muelle está extendido (compárese con la fig. 81,*a*). Cada una de estas fuerzas puede transmitir al cuerpo aceleración. Pero el cuerpo está en reposo. Esto significa que la aceleración $\vec{g}$, comunicada a la pesa por la fuerza de la gravedad, está dirigida en sentido opuesto a la aceleración $\vec{a}$, que proporciona la fuerza elástica. El módulo de las dos aceleraciones tiene que ser el mismo, es decir, $\vec{a} = -\vec{g}$.

Por esta causa, también las fuerzas que comunican al cuerpo aceleraciones iguales en módulo y de direcciones contrarias, son de iguales módulos y están

Isaac Newton (1643–1727) – uno de los más célebres físicos y matemáticos de todos los tiempos. El sabio enunció las leyes generales del movimiento mecánico, descubrió la ley de la gravitación universal y creó los fundamentos de los cálculos diferencial e integral. Newton realizó magníficos trabajos relacionados con la óptica. Fundamentalmente, Newton efectuó todos estos descubrimientos e investigaciones a una edad de 25 años. Fueron publicados mucho más tarde en dos libros, la obra grandiosa "Fundamentos matemáticos de filosofía natural" (1686) y "Óptica" (1704).

dirigidas en sentidos opuestos

$$\vec{F}_{\text{clást}} = -\vec{F}.$$

De aquí llegamos a la conclusión de que la fuerza se expresa tanto con un número, como con una dirección. Por esta causa, en la fig. 81,*b* hemos representado la fuerza $\vec{F}_{\text{clást}}$ y la fuerza $\vec{F}$ en forma de flechas de igual longitud, dirigidas en sentidos opuestos.

¿Pero qué clase de magnitud es la fuerza? ¿Qué es precisamente lo que tienen igual las dos fuerzas del ejemplo aducido? ¿Cómo están ligadas la fuerza y la aceleración? A estas preguntas nos responde la segunda ley de Newton, una de las más importantes de mecánica.

4.6. Fuerza y aceleración

Para aclarar cómo están ligadas la fuerza y la aceleración, nos dirigiremos a un experimento. Éste debe consistir en que bajo la acción de una misma fuerza (es indiferente, cuál) hay que animar el movimiento acelerado de diferentes cuerpos, es decir, de distinta masa y medir su aceleración.

Con el fin de realizar el experimento, hay que elegir un cuerpo que actúe sobre todos los otros cuerpos con igual fuerza. Semejante cuerpo puede ser un muelle alargado o comprimido, en el que actúa la fuerza elástica. Ésta se distingue de todas las demás fuerzas por la notoria singularidad de que, como hemos visto, SÓLO depende de la longitud a la que está alargado o comprimido el muelle, pero no depende del cuerpo en el que éste se fija[1]. Por esto, sobre TODO cuerpo sujeto en un muelle, alargado a una longitud determinada, actúa

[1] La práctica muestra que no hay otros cuerpos en la naturaleza que posean tal propiedad.

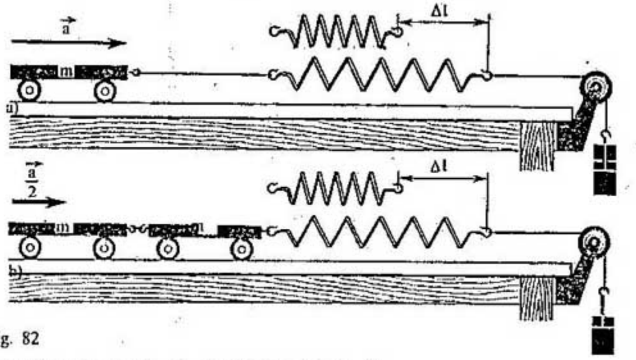


Fig. 82

una misma fuerza, la de elasticidad del muelle.

Por ejemplo, podemos realizar un experimento que, a primera vista, es sencillo (en realidad, es bastante difícil). En un carrito de masa m conocida se fija un extremo del muelle, mientras que en el otro sujetamos un hilo con una pesa que pasa por una polea (fig. 82, *a*). A causa de la atracción de la Tierra, la pesa se desplaza hacia abajo y alarga el muelle. Éste, alargado hasta una longitud determinada Δl, actúa por intermedio de la fuerza elástica sobre el carrito y le comunica una aceleración que puede ser medida, por ejemplo, aplicando el método estroboscópico (véase 2.2). Sea que obtuvimos la aceleración a.

Repitamos este experimento recurriendo no a uno, sino a dos carritos iguales, unidos entre sí (fig. 82, *b*), de forma que su masa total sea igual a 2 m. Como la fuerza debe ser la misma, hemos de medir la aceleración de este "tren", *siendo el mismo el alargamiento del muelle* Δl. Para que éste sea el mismo que en el primer experimento, habrá que elegir y suspender del hilo otra pesa (la dificultad del experimento consiste precisamente en la elección de las pesas). El experimento nos mostrará que manteniendo el mismo alargamiento Δl del muelle, la aceleración de los dos carritos será igual a $a/2$. Si componemos un "tren" de tres, cuatro y más carritos, para el alargamiento Δl del muelle, la aceleración será tres, cuatro y así sucesivamente veces menor que la de un carrito. Resulta que al aumentar la masa del carrito cierto número de veces, la aceleración que se le transmite por una misma fuerza, disminuye ese mismo número de veces. Esto significa que *resulta igual el producto de la masa del carrito por su aceleración.*

Este mismo experimento es más fácil organizarlo comunicando a cuerpos de diversa masa aceleraciones centrípetas. Hagamos de nuevo uso de la máquina centrífuga.

Asentemos el cuerpo M, en forma de un cilindro de aluminio con un agujero taladrado de lado a lado a lo largo del eje, en la barra de la centrífuga (fig. 83, *a*). Fijemos en el cilindro uno de los extremos del muelle, sujetando el segundo en la armazón de la máquina en el punto A. Pongamos la máquina centrífuga

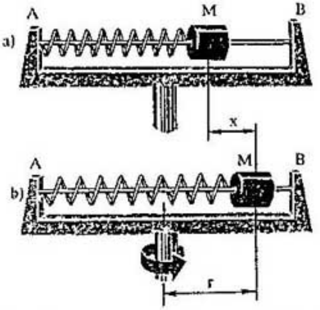


Fig. 83

en rotación. En tal caso, como vimos en 3.4, el cilindro M comenzará a deslizarse por la barra alejándose del punto A y, con ello, estirando el muelle. Si no estuviera presente el muelle, el cilindro llegaría hasta el tope en el punto B. Pero como consecuencia de la fuerza elástica del muelle alargado, el cilindro, después de alejarse en cierta medida del eje de rotación (a la distancia x), comenzará a girar por una circunferencia de radio r (fig. 83, b). La aceleración centrípeta del cilindro M está dirigida siguiendo el radio hacia el centro. El eje del muelle también está dirigido a lo largo del radio. Por lo tanto, la dirección de la aceleración del cilindro M va a lo largo del eje del muelle, lo mismo que la fuerza elástica. Es evidente, que esta fuerza es la que comunica al cilindro la aceleración centrípeta.

Como sabemos, el módulo de ésta es

$$a = \omega^2 r,$$

donde ω es la velocidad angular de rotación de la máquina.

Si medimos la velocidad angular ω y el radio r, hallaremos el módulo de la aceleración $\vec{a}$.

Sustituyamos ahora el cilindro de aluminio por otro de acero de iguales dimensiones. Como ya sabemos, su masa es tres veces mayor que la del cilindro de aluminio.

Pongamos de nuevo la máquina en rotación y elijamos una velocidad tal de giro, bajo la cual el alargamiento del muelle resulte igual al obtenido cuando giramos el cilindro de aluminio. En semejante caso, la fuerza que actúa sobre el cilindro de acero será también la misma. Del experimento nos enteraremos que la aceleración de este último es tres veces menor que la del cilindro de aluminio.

En la fig. 84 viene representada la fotografía de un instrumento en el que en la escuela se realiza el experimento descrito.

¿A QUÉ ES IGUAL LA FUERZA? El experimento que hemos estudiado puede ser organizado para muchos cuerpos de las más distintas masas. Lo mismo que en el primer experimento con los carritos, veremos que, si sobre distintos cuerpos actúa *una misma* fuerza, las aceleraciones de dichos cuerpos serán diferentes, pero el producto de la masa del cuerpo por su aceleración resultará ser el *mismo*.

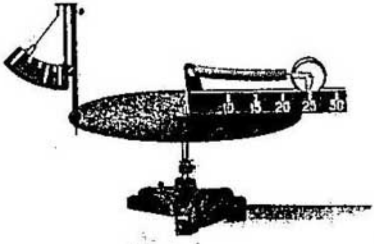


Fig. 84

Por esta razón, es natural que consideremos que dicho producto es la magnitud que expresa la fuerza. Es precisamente ésta la que sirve de medida de la acción de un cuerpo sobre otro: la fuerza es grande si comunica al cuerpo tal aceleración con la que se obtiene un gran producto de ésta por la masa del cuerpo sobre el que actúa la primera. Pero siendo grande la masa del cuerpo, incluso una gran fuerza puede comunicarle pequeña aceleración.

Designando la fuerza que actúa sobre el cuerpo con $\vec{F}$, la aceleración de éste con $\vec{a}$ y su masa con m, podemos escribir

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

¿Pero puede ser que esta igualdad sólo sea justa para la fuerza elástica de un muelle alargado y no sirva para otras fuerzas? Con el fin de responder a esta pregunta, retornemos a la fig. 81 (pág. 88). Allí vimos que cuando sobre un cuerpo de masa m están aplicadas la fuerza elástica $\vec{F}_{\text{elást}}$ y la de la gravedad $\vec{F}$ y el cuerpo se encuentra en reposo, $\vec{a} = -\vec{g}$ y $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{elást}}$. Mas la fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo, como acabamos de aclarar, es igual al producto de su masa por la aceleración que la fuerza comunica al cuerpo, es decir,

$$\vec{F}_{\text{elást}} = m\vec{a} = -m\vec{g}.$$

Esto significa que la fuerza de la gravedad $\vec{F}$, igual a $-\vec{F}_{\text{elást}}$, será igual a

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

De esta manera hemos establecido que la fuerza de la gravedad también es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que dicha fuerza le comunica.

4.7. Segunda ley de Newton

Los experimentos, semejantes a los que hemos considerado en el parágrafo anterior y muchos otros, permitieron a Newton enunciar una de las más importantes leyes de mecánica, o sea, la SEGUNDA LEY DE NEWTON.

La fuerza que actúa sobre cierto cuerpo es igual al producto de la masa de éste por la aceleración que dicha fuerza comunica al cuerpo.

La segunda ley de Newton de forma matemática se expresa con la fórmula

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a},}$$

de donde

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

De la fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$ en ningún caso se debe llegar a la conclusión de que la fuerza depende de la masa y de la aceleración del cuerpo sobre el que ella está aplicada. Ante todo queda claro que la fuerza no puede depender de la aceleración que ella comunica al cuerpo. La fuerza es la causa de la aceleración, de modo que la causa no puede ser función del efecto. Por ejemplo, de la fórmula $v = s/t$, que se refiere al movimiento uniforme, no se puede sacar la conclusión de que la velocidad depende del desplazamiento o del tiempo.

Ya hemos visto que existen diferentes fuerzas: de rozamiento, elástica, de la gravedad. De qué depende cada fuerza[1] se puede saber no de la segunda ley de Newton, sino tan sólo de la práctica, del experimento. La indicada ley sólo significa, y en ello consiste su esencia, que toda fuerza, independientemente de lo que ella dependa, es igual al producto de la masa del cuerpo, al que está aplicada, por su aceleración.

Es de suma importancia comprender, que de la segunda ley de Newton se infiere que *las fuerzas que actúan sobre el cuerpo determinan su aceleración*, es decir, la variación de la velocidad y no la propia velocidad del cuerpo. Por esta causa, *la dirección de la aceleración siempre coincide con la dirección de la fuerza que actúa.* Mientras que el sentido de la velocidad y, por lo tanto del desplazamiento, puede no coincidir con la dirección de la fuerza actuante. Por ejemplo, la fuerza puede estar constantemente dirigida de manera perpendicular a la velocidad de movimiento del cuerpo. En tal caso, el movimiento transcurre sobre una circunferencia, mientras que la aceleración, lo mismo que la fuerza, está dirigida a lo largo del radio trazado del cuerpo en movimiento al centro. Así se movía el cuerpo bajo la acción de la fuerza elástica en la máquina centrífuga.

LAS FUERZAS SE SUMAN DE FORMA VECTORIAL. Si el cuerpo se encuentra en interacción no con uno, sino que con varios cuerpos, sobre él actúa no una, sino que varias fuerzas, con la particularidad de que éstas "no molestan" unas a otras a comunicar al cuerpo, sobre el que actúan, su aceleración. Por esta causa la aceleración, que transmiten conjuntamente al cuerpo todas las fuerzas que sobre él actúan, será, la misma que le comunicaría una sola fuerza igual a la suma de todas las fuerzas indicadas.

Como la fuerza es una magnitud vectorial, bajo el concepto *suma de todas las fuerzas deberá comprenderse una suma vectorial.* Semejante suma recibe el nombre de RESULTANTE de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo. En la fórmula

[1] De esto trataremos con detalle en el siguiente capítulo.

$\vec{F} = m\vec{a}$, que expresa la segunda ley de Newton, hay que entender por $\vec{F}$ la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

He aquí un sencillo ejemplo. En la fig. 85 vemos un tiovivo con sus "pasajeros", cada uno de los cuales se mueve describiendo una circunferencia. Las fuerzas que sobre ellos actúan se muestran esquemáticamente en la fig. 86. Sobre los "pasajeros" vienen aplicadas al mismo tiempo dos fuerzas: $\vec{F}_1$ – por parte de la Tierra, dirigida hacia abajo, y la fuerza $\vec{F}_2$ – por parte del cable, dirigida a lo largo de éste. Bajo el efecto de las dos fuerzas, el "pasajero" se mueve siguiendo una circunferencia, en torno de la columna en la que el cable está sujeto. Esto significa, que la aceleración se dirige al centro de la circunferencia y no a lo largo de la fuerza $\vec{F}_1$ o $\vec{F}_2$. De la figura se infiere que hacia el centro de la circunferencia también está dirigida la fuerza $\vec{F}$, que es igual a la suma geométrica de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Por lo tanto, el "pasajero" se mueve como si sobre él actuasen no las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, sino que sólo una, su resultante $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

La suma vectorial de las fuerzas que sobre el cuerpo actúan, también puede resultar nula. En tal caso, la aceleración será asimismo igual a cero y el cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Precisamente, este caso teníamos en cuenta en 4.1, cuando hablábamos de la compensación del efecto de varios cuerpos sobre el cuerpo dado. En el ejemplo que allí aducimos, sobre la bolita colgada de un cordón, la compensación consiste en que las fuerzas, con las que el cordón y la Tierra actúan sobre la bolita, son de dirección opuesta e iguales por su valor absoluto ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$), por lo que su fuerza resultante es cero (fig. 87).

En la figura 88 se ilustra el caso en que es nula la resultante, es decir, la suma vectorial no de dos, sino que de tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ que actúan sobre el

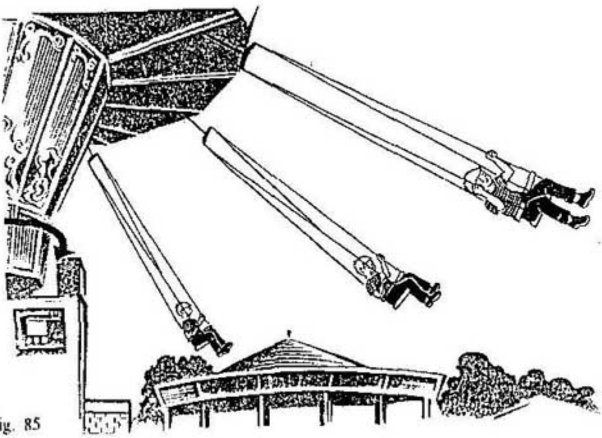


Fig. 85

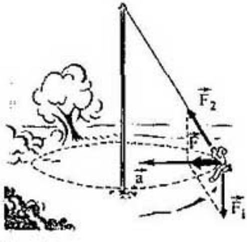


Fig. 86

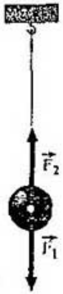


Fig. 87

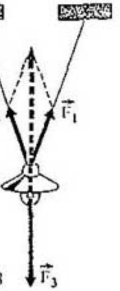


Fig. 88

cuerpo (farol).

Ahora, haciendo uso del concepto de fuerza, podemos ofrecer otra enunciación de la segunda ley de Newton.

Existen sistemas de referencia, respecto de los cuales un cuerpo en movimiento de traslación conserva constante su velocidad, si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a cero[1]. Tales sistemas de referencia reciben el nombre de inerciales.

La segunda ley de Newton sólo es válida en sistemas inerciales de referencia.

De la fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$, que expresa la segunda ley de Newton, se desprende en qué unidades se mide la fuerza.

En el SI se toma como unidad de fuerza, aquella que a un cuerpo de 1 kg *de masa transmite una aceleración igual a* 1 m/s². Esta unidad recibe el nombre de NEWTON O NEUTONIO (abreviado, N):

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}}.$$

¿ ?

1. ¿Qué es lo que llamamos fuerza?
2. ¿Cómo está dirigida la aceleración de un cuerpo, provocada por la fuerza que sobre él actúa?
3. ¿Puede un cuerpo, sobre el que actúa una sola fuerza, moverse sin aceleración, encontrarse en reposo?
4. ¿Es justa la afirmación de que la velocidad de un cuerpo sólo queda definida por la fuerza que sobre él actúa?
5. ¿Es justa la afirmación de que un cuerpo siempre se mueve en la dirección de la fuerza que se le aplica?
6. ¿Es justa la afirmación de que el desplazamiento de un cuerpo sólo viene definido por la fuerza que sobre él actúa?
7. Enunciar la primera ley de Newton, empleando el concepto de fuerza.
8. Un cuerpo se mueve a cierta velocidad constante. ¿Cómo se moverá después de aplicarle dos fuerzas iguales en módulo y de direcciones opuestas?

---

[1] Esta deducción es justa únicamente para un punto material o para cuerpos que se encuentran sólo en movimiento uniforme. La suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo puede ser igual a cero, pero el mismo encontrarse en rotación. Con ello, los puntos del cuerpo se mueven con aceleración.

9. Un cuerpo de masa m se mueve sobre una circunferencia de radio r a velocidad $\vec{v}$ constante en módulo. ¿Actúa sobre él una fuerza? ¿A qué es igual el módulo de dicha fuerza y cómo está dirigida?

Ejercicios 13

1. Un cuerpo de 1 kg de masa cae a tierra con aceleración constante de 9,8 m/s^2. ¿A qué es igual la fuerza que sobre él actúa (la fuerza de la gravedad)?
2. Un automóvil, cuya masa es de 1000 kg, se mueve por una carretera circular de 100 m de radio a una velocidad de 20 m/s. ¿A qué será igual la fuerza que actúa sobre el automóvil? ¿Cómo está dirigida?
3. Un automóvil de 2160 kg de masa, comienza su movimiento con una aceleración que en el transcurso de 30 s permanece constante. Durante este tiempo recorre 500 m. ¿Cuál será el módulo de la fuerza aplicada al automóvil durante dicho tiempo?
4. Muchos años antes de Newton, el famoso pintor y sabio italiano Leonardo de Vinci expresó la siguiente afirmación: "Si una fuerza durante el tiempo prefijado desplaza el cuerpo a una distancia determinada, esa misma fuerza desplazará la mitad de dicho cuerpo a la misma distancia en un intervalo de tiempo dos veces menor". ¿Es justa o no esta afirmación?

4.8. Medición de las fuerzas

La fuerza es una de las más importantes magnitudes de mecánica. El motivo de esto radica en que conociendo el valor de la fuerza $\vec{F}$, que actúa sobre un cuerpo de masa m, resulta posible calcular su aceleración $\vec{a}$ recurriendo a la fórmula

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

En tanto que la aceleración del cuerpo es precisamente aquella magnitud sin la que no se puede solucionar el problema fundamental de mecánica. Pero para conocer el valor de la fuerza, ésta debe ser medida.

¿Cómo medir la fuerza aplicada a un cuerpo?

Recordemos cómo medíamos la fuerza de la gravedad, con la que la Tierra actúa sobre todos los cuerpos junto a su superficie (véase A. V. Piórishkin, N. A. Ródina. Física 1).

Con este fin, el cuerpo se suspendía de un muelle vertical. El muelle se alargaba a cierta longitud, con la que la fuerza elástica $\vec{F}_{\text{elást}}$, dirigida a lo largo del eje del muelle hacia arriba, equilibraba la fuerza de la gravedad $\vec{F}$:

$$\vec{F}_{\text{elást}} = -\vec{F}.$$

La fuerza $\vec{F}_{\text{elást}}$, con la que el muelle alargado actúa sobre el cuerpo, era conocida (véanse los experimentos descritos en las págs. 90, 91).

De tal modo, hallamos que la fuerza de la gravedad, aplicada a un cuerpo de masa m, es igual a mg. Así pues, la medición de la fuerza de la gravedad consistía en que ella se equilibraba con una fuerza conocida de antemano.

Empleando este mismo procedimiento puede ser medida cualquiera otra fuerza que actúa sobre todo cuerpo. Ésta debe quedar equilibrada con una

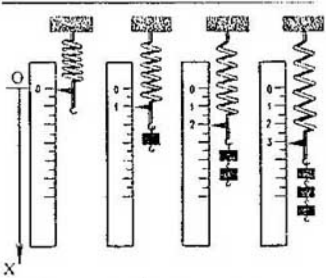


Fig. 89

fuerza conocida, aplicada a este mismo cuerpo.

El muelle es en particular cómodo para medir las fuerzas, ya que, al estirarlo (o comprimirlo) a una longitud determinada, actúa sobre *todos los cuerpos* con la misma fuerza. Además, con ayuda de un mismo muelle podemos obtener distintas fuerzas, estirándolo a diferentes longitudes.

Al emplear un muelle a fin de medir fuerzas, hay que determinar con anterioridad los valores de las fuerzas elásticas para diversos alargamientos de aquél. Con otras palabras, hay que conocer cómo depende la fuerza elástica del alargamiento del muelle. Con este fin, es preciso hacer de nuevo uso de la máquina centrífuga, colocando en ella un muelle, en el que está sujeto un cuerpo de masa conocida, y medir su alargamiento a diferentes velocidades de rotación.

Pero ahora, cuando conocemos el valor de la fuerza de la gravedad que actúa sobre el cuerpo, podemos establecer, utilizando un procedimiento más sencillo, qué fuerzas elásticas corresponden a distintos alargamientos del muelle dado.

Con este objeto, hay que suspender de un muelle, dispuesto de forma vertical, cuerpos de diferente masa y cada vez medir el alargamiento del muelle con ayuda de una escala (fig. 89). En efecto, ya sabemos que sobre un cuerpo de masa m actúa la fuerza de la gravedad que en módulo es igual a mg. Al suspender el cuerpo del muelle, estando aquél en reposo, dicha fuerza de la gravedad se equilibrará, por la fuerza elástica del muelle. Por lo tanto, está última también será por su módulo igual a mg.

Así se puede establecer la dependencia entre el alargamiento del muelle y la fuerza de la gravedad que actúa sobre el cuerpo suspendido de él. Si frente las divisiones de la escala se ponen números que indican el valor de la fuerza elástica en newtones, el muelle estará graduado. Semejante muelle graduado es

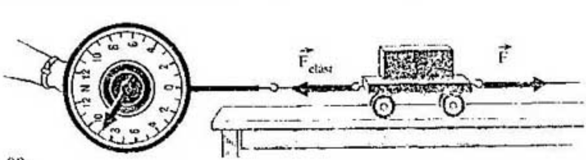


Fig. 90

7—948

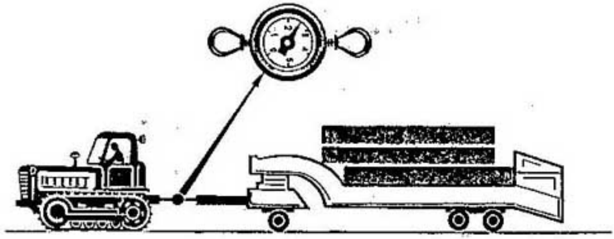


Fig. 91

ya un instrumento apto para medir toda clase de fuerzas y recibe el nombre de DINAMÓMETRO.

¿CÓMO SE MIDE UNA FUERZA CON EL DINAMÓMETRO? Supongamos que sobre cierto cuerpo actúa en dirección horizontal la fuerza $\vec{F}$, que debe ser medida (fig. 90). Fijemos en dicho cuerpo el gancho de un dinamómetro dispuesto horizontalmente. El propio instrumento está inmóvil. A causa del efecto de la fuerza $\vec{F}$, el cuerpo recibe aceleración y se mueve arrastrando consigo el gancho del dinamómetro sujeto en él. El muelle se alarga y surge una fuerza elástica en dirección opuesta a $\vec{F}$. Cuando las dos fuerzas, la elástica y $\vec{F}$, sean iguales por su módulo, el cuerpo se parará y la aguja del dinamómetro indicará en la escala el valor de $\vec{F}$.

Cabe señalar, que el dinamómetro y el cuerpo, hacia el cual está aplicada la fuerza, deben permanecer de modo obligatorio en reposo. Nada variará si ambos se encuentran en movimiento rectilíneo y uniforme, ya que éste también transcurre cuando las fuerzas son iguales y están dirigidas en sentidos opuestos. Por ejemplo, en la fig. 91 se muestra como "en marcha" se mide la fuerza con la que la tierra (el terreno) actúa sobre una plataforma a remolque de un tractor. Para que la medición sea correcta, sólo es necesario que el tractor se mueva a velocidad constante.

4.9. Tercera ley de Newton

Hemos indicado multitud de veces que el influjo de los cuerpos entre sí siempre es mutuo, que en todos los casos los cuerpos están en interacción. Ahora podemos decir, que cada uno de los cuerpos en interacción, actúa sobre otro con cierta fuerza. Justamente por esta causa, cada uno de ellos adquiere aceleración. En 4.4 vimos que la razón entre los módulos de las aceleraciones de los dos cuerpos es igual a la relación inversa de las masas:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{m_2}{m_1}.$$

De aquí $m_1a_1 = m_2a_2$.

Allí mismo fue indicado que las aceleraciones, que se comunican a los dos cuerpos durante la interacción, están dirigidas en direcciones contrarias. Por

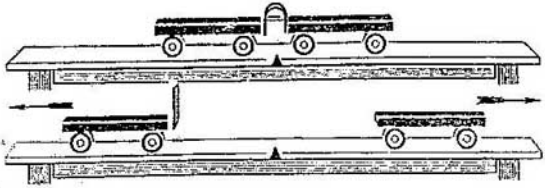


Fig. 92

esto, podemos escribir:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2.$$

Pero $m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1$, mientras que $m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2$, donde $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, son las fuerzas que actúan sobre el cuerpo primero y segundo. Por consiguiente,

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.}$$

Esta igualdad expresa la TERCERA LEY DE NEWTON.

Los cuerpos actúan uno sobre otro con fuerzas iguales en módulo y dirigidas en sentidos opuestos a lo largo de una misma recta.

Esta ley de Newton muestra que a causa de la acción "mutua" de los cuerpos entre sí, las fuerzas siempre surgen a pares. Si sobre un cuerpo actúa una fuerza, existe obligatoriamente otro cuerpo sobre el que el primero actúa con una fuerza de valor absoluto idéntico, pero dirigida en sentido contrario. Las aceleraciones comunicadas por dichas fuerzas a los cuerpos, también tienen direcciones opuestas. La tercera ley de Newton es justa en sistemas inerciales de referencia.

El sentido de la tercera ley de Newton es aclarado en el siguiente ejemplo.

Tomemos dos carritos iguales y en uno de ellos fijemos una placa elástica de acero. Doblemos ésta y con un hilo fijémosla en la posición inicial. Acerquemos el segundo carrito al primero de forma que entre en contacto con el otro extremo de la placa (fig. 92). Ahora cortemos el hilo. La placa comenzará a enderezarse y veremos que los carritos se ponen en movimiento. Esto significa que ambos han recibido aceleración. Como las masas de los carritos son idénticas, sus aceleraciones también serán de igual módulo, lo mismo que sus velocidades, sobre lo que podemos juzgar por el hecho de que la longitud de los desplazamientos de los carros en un mismo intervalo de tiempo será la misma.

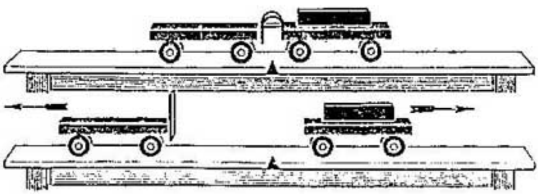


Fig. 93

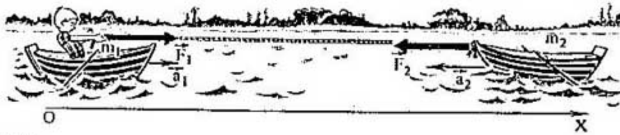


Fig. 94

Si sobre uno de los carritos ponemos cualquier peso (fig. 93), veremos que, después de liberar la placa, los desplazamientos de aquéllos no serán iguales. Esto significa que sus aceleraciones tampoco serán las mismas: la del carrito cargado resultará menor.

En este ejemplo, como en muchos otros, podemos destacar una particularidad más de aquellas dos fuerzas que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, surgen simultáneamente durante la interacción de dos cuerpos: dichas fuerzas siempre son de la misma naturaleza. Si, por ejemplo, sobre un cuerpo actúa la fuerza elástica de otro cuerpo, el primero también "responde" al segundo con esa misma fuerza.

Siempre es necesario tener presente que *las fuerzas que surgen durante la interacción de los cuerpos, están aplicadas a diferentes cuerpos y, por esto, no pueden equilibrarse entre sí.* Sólo pueden equilibrarse aquellas fuerzas que se aplican a un mismo cuerpo.

PROBLEMA. Un hombre, sentado en una barca, atrae con una cuerda otra barca hacia sí (fig. 94). La masa de la primera barca es de 400 kg, de la segunda, 200 kg. ¿Qué desplazamiento realizará cada barca durante 5 s, si la fuerza elástica de la cuerda tirante es 100 N? Despreciamos la fuerza de rozamiento y consideramos que el agua está en reposo.

Solución. En correspondencia con la tercera ley de Newton, las barcas recibirán aceleraciones de direcciones opuestas y se pondrán en movimiento al encuentro una de otra. Dirijamos el eje de coordenadas X en el sentido del movimiento de la primera barca. Entonces, podemos escribir:

$$F_{1x} = m_1 a_{1x}, \quad F_{2x} = m_2 a_{2x},$$

donde F_{1x} es la proyección de la fuerza que actúa sobre la primera barca; F_{2x}, la proyección de la fuerza que actúa sobre la segunda barca ($F_{2x} = -F_{1x}$); a_{1x} y a_{2x}, las proyecciones de las aceleraciones de la primera y segunda barca. De aquí

$$a_{1x} = \frac{F_{1x}}{m_1} \text{ y } a_{2x} = \frac{F_{2x}}{m_2}.$$

Las proyecciones de los desplazamientos de las barcas $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$ se calculan con las fórmulas:

$$s_{1x} = \frac{a_{1x}t^2}{2} = \frac{F_{1x}t^2}{2m_1} \text{ y } s_{2x} = \frac{a_{2x}t^2}{2} = \frac{F_{2x}t^2}{2m_2}.$$

Poniendo los datos numéricos expuestos en el planteamiento del problema, obtenemos:

$$s_{1x} = \frac{100\,\text{N}\cdot(5\,\text{s})^2}{2\cdot 400\,\text{kg}} \approx 3{,}1\ \text{m}, \quad s_{2x} = -\frac{100\,\text{N}\cdot(5\,\text{s})^2}{2\cdot 200\,\text{kg}} \approx -6{,}2\ \text{m}.$$

¿ ?

1. Enunciar la tercera ley de Newton.
2. La tercera ley de Newton también tiene la siguiente enunciación, ofrecida por su propio autor: "A toda acción se opone una reacción igual y de sentido contrario". ¿Hay diferencia física entre la acción y la reacción?
3. ¿Se compensan entre sí las fuerzas que surgen durante la interacción de dos cuerpos?
4. ¿Por qué, cuando choca un coche de turismo con un camión cargado, los deteriodos del primero son mayores que los del segundo?

Ejercicios 14

1. Dos personas tiran de una cuerda en direcciones contrarias con una fuerza de 50 N, cada una. ¿Se romperá la cuerda si ella resiste una tensión hasta de 80 N?
2. Dos niños, cuyas masas son 40 y 50 kg, están sobre patines en una pista de hielo. El primer niño empuja al segundo con una fuerza de 10 N. ¿Qué aceleraciones adquerirán los niños?
3. Una bolita está atada de un hilo y gira en el plano horizontal dando 1 vuelta en 0,5 s. ¿Con qué fuerza actúa la bolita sobre el hilo que le obliga a girar? La longitud del hilo es 0,5 m, la masa de la bolita, 200 g.

Lo más importante en el cuarto capítulo. Importancia de las leyes de Newton

La práctica y las observaciones nos muestran que la causa de las variaciones del movimiento de los cuerpos, es decir, la causa de la variación de su velocidad, son los influjos de otros cuerpos sobre ellos. Sin semejantes influjos el movimiento de los cuerpos no puede variar, o sea, no puede surgir la aceleración. La acción cuantitativa de un cuerpo sobre otro se expresa mediante una magnitud llamada FUERZA.

La acción de un cuerpo sobre otro no es unilateral. Los cuerpos actúan mutuamente, ellos *están en interacción*. Durante ésta, la aceleración del cuerpo depende de una propiedad singular de éste, de su inertidad, expresada por la magnitud llamada MASA.

Estos hechos experimentales yacen en la base de las tres leyes de movimiento (de dinámica), descubiertos por Newton a fines del siglo XVII. Estas leyes son asombrosamente breves y sencillas, si los movimientos se consideran con relación a sistemas de referencia elegidos de forma adecuada, es decir, a sistemas inerciales de referencia.

La PRIMERA LEY DE NEWTON afirma que existen semejantes sistemas de referencia y permite hallarlos.

Hay tales sistemas de referencia, respecto de los cuales no varía la velocidad de un cuerpo en movimiento de traslación, si es nula la suma de las fuerzas que sobre él actúan.

La SEGUNDA LEY DE NEWTON establece la ligazón entre la fuerza y la aceleración que ésta provoca.

Independientemente de su naturaleza, la fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa de éste por la aceleración que es capaz de comunicarle esta fuerza:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

La TERCERA LEY DE NEWTON muestra que la acción de un cuerpo sobre otro tiene carácter mutuo.

Los cuerpos actúan entre sí con fuerzas de la misma naturaleza, iguales por su valor absoluto y dirigidas en sentidos contrarios:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Las leyes de movimiento se expresan con ayuda de dos sencillas fórmulas (a primera vista). Pero su contenido es riquísimo. Pues a nuestro alrededor transcurren los más diversos movimientos: fluye el agua de los ríos, caen las aguas de las cataratas, pasan sobre la Tierra vientos y huracanes, avanzan por las carreteras los automóviles, navegan los buques por los mares, vuelan en el aire los aviones, por el espacio sideral se mueven las galaxias, las estrellas, los planetas y las naves cósmicas creadas por el hombre. Todos estos movimientos y los cuerpos que los realizan no se parecen unos a otros. También son diferentes las fuerzas que sobre ellos actúan. Pero para todos estos movimientos, cuerpos y fuerzas, las leyes de Newton son justas en igual grado, expresadas en forma matemática mediante las mencionadas fórmulas, que a primera vista son tan sencillas.

La mecánica newtoniana fue la primera TEORÍA consumada en la historia de la física (y, en general, de las ciencias), que describió correctamente una amplia clase de fenómenos, el movimiento de los cuerpos. No en vano, uno de los contemporáneos de Newton, expresó su admiración hacia dicha teoría, en el siguiente verso cómico:

> El mundo estaba rodeado de profunda oscuridad.
> ¡Que aparezca la luz! Y se presentó Newton.

En principio, las leyes de Newton permiten resolver cualquier problema de mecánica. Si conocemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es posible hallar la aceleración de éste en cualquier punto de la trayectoria, en todo momento de tiempo.

Así acaba aquella "cadena" que mencionamos al finalizar el tercer capítulo: conociendo las fuerzas y la masa de un cuerpo, se halla la aceleración, después se calculan su velocidad y desplazamiento en cualquier intervalo de tiempo y, por último, las coordenadas del cuerpo en todo momento de tiempo. Con este fin, deben ser conocidas las "condiciones iniciales", es decir, la posición y velocidad iniciales del cuerpo.

Por ejemplo, los científicos que dirigen el vuelo de una nave cósmica deben conocer, como es lógico, con anterioridad, la posición de la nave en cualquier momento de tiempo. La pueden determinar, haciendo uso de semejante "cadena". Conocen la posición primaria de la nave en la plataforma de lanzamiento y su velocidad inicial. Saben también qué fuerzas actúan sobre la nave en cualquier punto de la trayectoria. Empleando estos datos, los científicos resuelven el problema de dinámica en lo que atañe al vuelo cósmico. Como las fuerzas que sobre la nave actúan varían constantemente, los cálculos son tan complicados que es preciso acudir a la "ayuda" de ordenadores electrónicos.

Hemos dicho continuamente, que el problema fundamental de mecánica consiste en definir la posición del cuerpo en movimiento en todo momento de tiempo. Pero no se debe pensar que las leyes de movimiento tan sólo se usan para determinar, precisamente, la posición del cuerpo. En la práctica, es preciso calcular con frecuencia tales magnitudes, como la velocidad de un cuerpo, su aceleración, las fuerzas que sobre él actúan, etc. Claro está, que las leyes de Newton permiten también resolver semejantes problemas, más sencillos.

5 LAS FUERZAS DE LA NATURALEZA

¿HAY MUCHAS FUERZAS EN LA NATURALEZA?

Ya sabemos que la causa de la variación del movimiento es decir, de que aparezca la aceleración de los cuerpos, es la fuerza. Las fuerzas surgen durante la interacción de los cuerpos entre sí. ¿Pero, cuántos tipos de interacciones existen y cuál es su cantidad?

A primera vista, puede parecer que se tropieza con multitud de diferentes tipos de efectos sobre los cuerpos y, por lo tanto, existen muchos tipos de distintas fuerzas. Podemos comunicar aceleración a un cuerpo empujándolo o tirando de él con la mano; todos los cuerpos que caen a la Tierra se mueven con aceleración; cuando el viento llena las velas, el velero comienza a moverse con aceleración; tensando y soltando la cuerda de un arco, transmitimos aceleración a la flecha. En todos estos casos actúan ciertas fuerzas y nos parece que todas ellas son distintas en absoluto. Es más, podemos seguir mencionando otras fuerzas. Cada uno habrá oído hablar de las fuerzas eléctricas y magnéticas, sobre la fuerza de los terremotos, de un muelle, sobre la fuerza de las mareas, etc.

¿Pero en la realidad existe esa gran cantidad de diferentes fuerzas en la naturaleza? Resulta que no.

Al estudiar el movimiento mecánico de los cuerpos, se tropieza sólo con tres tipos de fuerzas: *la elástica, la de rozamiento y la de la gravedad*. A éstas pueden reducirse todas las fuerzas, por muy diferentes que nos parecían, de las que acabamos de hablar. Pero, incluso estas tres fuerzas son la manifestación de tan sólo dos fuerzas de la naturaleza, en realidad diferentes: LAS FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS Y LAS FUERZAS DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

Hablemos, primero, de las fuerzas electromagnéticas.

Como sabemos del curso anterior de física, entre los cuerpos electrizados actúa una singular fuerza, llamada FUERZA ELÉCTRICA.

Recordemos que las fuerzas eléctricas pueden ser tanto de atracción, como de repulsión. En la naturaleza, existen cargas de dos tipos. Se ha convenido llamarlas cargas positivas y negativas. Dos cuerpos de cargas iguales se repelen, mientras que si éstas son de signo diferente, entre los cuerpos actúan fuerzas de atracción.

Las cargas eléctricas tienen una interesante propiedad. Cuando se mueven unas respecto de otras, entre las cargas, además de la fuerza eléctrica, surge otra más, que recibe el nombre de FUERZA MAGNÉTICA.

Ambas fuerzas – la eléctrica y la magnética – están tan íntimamente ligadas que resulta imposible separarlas: su efecto es *simultáneo*. Como con la mayor frecuencia nos vemos obligados a tratar con cargas en movimiento, las fuerzas que entre ellas actúan no pueden ser llamadas ni eléctricas ni magnéticas. Son denominadas ELECTROMAGNÉTICAS.

¿De dónde aparece la "carga eléctrica" que es tan posible que el cuerpo tenga, como que carezca de ella?

Todo cuerpo está constituido por moléculas y átomos. A su vez, estos últimos, a pesar de ser pequeños en extremo (varias cienmillonésimas partes de un centímetro), constan de partículas aún más pequeñas: del núcleo atómico y de los electrones. Precisamente éstos, los núcleos y los electrones, tienen cargas eléctricas. Los primeros, carga positiva, los segundos, negativa.

En condiciones normales, en el átomo hay tantos electrones que su carga sumaria negativa es igual a la carga positiva del núcleo, de forma que en su total, es como si dijéramos que el átomo no tiene carga. Se dice que es eléctricamente neutro. En tal caso, los cuerpos constituidos por semejantes átomos neutros, son también eléctricamente neutros. Entre tales cuerpos, prácticamente, no existen fuerzas de interacción eléctrica.

Pero en un mismo sólido (o líquido) los átomos vecinos están situados tan cerca unos de otros que las fuerzas de interacción entre las cargas, de las que aquéllos constan, son muy considerables.

Las fuerzas de interacción entre los átomos dependen de la distancia entre ellos. Esta dependencia es muy complicada y hasta la fecha no es conocida con precisión. Pero se ha establecido de forma fidedigna que las fuerzas de interacción entre los átomos pueden variar su dirección al cambiar la distancia que los separa. Si esta última es muy pequeña, los átomos se repelen. Pero al aumentar la distancia entre ellos, los átomos comienzan a atraerse. Cuando entre ellos hay cierta distancia, las fuerzas de su interacción se anulan. Es natural que, precisamente, a esas distancias se disponen los átomos unos respecto de otros (en los sólidos y líquidos). Cabe señalar, que esas distancias son muy pequeñas y aproximadamente iguales a las dimensiones de los propios átomos.

5.1. Fuerzas elásticas

Al alargar un cuerpo, la distancia entre los átomos aumenta en cierto grado y entre ellos comienzan a obrar las fuerzas de atracción. Éstas comunican a los átomos aceleración y los obligan a acercarse de nuevo a la distancia anterior.

Viceversa, al comprimir un cuerpo, con lo que los átomos se aproximan, surgen fuerzas de repulsión que obligan a éstos a separarse de nuevo y ocupar los puestos anteriores.

Así pues, durante la compresión o tracción de un cuerpo, en él surgen fuerzas de naturaleza eléctrica que restablecen las dimensiones iniciales del cuerpo.

Semejantes fuerzas de restablecimiento también surgen cuando los cuerpos se flexionan (fig. 95) o torsionan (fig. 96), ya que en estos casos varía la disposición mutua de los átomos.

LA TRACCIÓN, COMPRESIÓN, FLEXIÓN Y TORSIÓN reciben el nombre de DEFORMACIONES DE LOS CUERPOS. La práctica muestra que con cualquier tipo de deformación, si ésta no es muy grande en comparación con las dimensiones

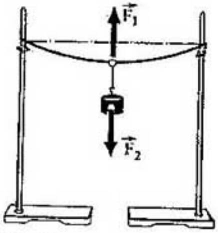


Fig. 95

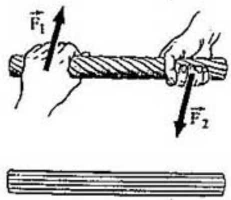


Fig. 96

del cuerpo, surge una fuerza que obliga al cuerpo a retornar al estado en que estaba antes de la deformación. Esta fuerza recibe el nombre de FUERZA ELÁSTICA.

En 4.6 y 4.8 ya hemos tropezado con las fuerzas elásticas que aparecen al deformar un muelle. Ahora, ya podemos decir que la fuerza elástica surge cuando deformamos cualquier cuerpo y no sólo un muelle: ¡todo cuerpo puede desempeñar el papel de muelle!

Ya que la fuerza elástica hace que el cuerpo retorne a su estado inicial, quiere decir que está dirigida en sentido contrario al desplazamiento de las partículas del cuerpo durante la deformación. Por ejemplo, si una barra que tiene un extremo fijado (fig. 97, *a*) se estira de forma que sus partículas se desplacen a la derecha, respecto del extremo fijado (fig. 97, *b*), surgirá una fuerza elástica dirigida a la izquierda. Si, como se muestra en la fig. 97, *c*, la barra está comprimida, sus partículas resultarán desplazadas a la izquierda y la fuerza elástica se dirigirá a la derecha.

La fuerza elástica es la que surge al deformar un cuerpo y está dirigida en dirección opuesta a los desplazamientos de las partículas del cuerpo al producirse la deformación.

En adelante, vamos a considerar las fuerzas elásticas que surgen sólo *en caso de las deformaciones por tracción o compresión.*

En la fig. 97, *c* la variación de la longitud de la barra sometida a tracción, o sea, su alargamiento, viene designado por la letra x. En las figs. 97, *b* y *c*, vemos que tanto en caso de tracción como de compresión de la barra, x es también la proyección sobre el eje X del vector de desplazamiento del extremo libre de la barra, cuando ésta se deforma. Cuando tiene lugar la tracción de la barra, la proyección es positiva, en caso de compresión, negativa.

LEY DE HOOKE. Experimentos, similares a los descritos en 4.8 (véase la fig. 89), fueron realizados no sólo con muelles, sino que también con barras sólidas. Aquéllos permitieron aclarar cómo está ligada la fuerza elástica con las deformaciones que ella provoca. Resultó que, siendo el alargamiento lo suficientemente pequeño (en comparación con la longitud de la propia barra), el módulo del vector de la fuerza elástica, es razón directa del módulo del vector de desplazamiento del extremo libre de la barra. Pero las proyecciones sobre el eje X de dichos vectores, como ya hemos dicho (véase la fig. 97, *b* y *c*), tienen signos contrarios. Por esta causa, tal dependencia se expresa de forma matemática con la igualdad

$$\boxed{(F_{\text{elást}})_x = -kx.} \qquad (1)$$

Aquí, k es un coeficiente de proporcionalidad llamado RIGIDEZ del cuerpo (o del muelle). Esta magnitud es función de las dimensiones del cuerpo (muelle) y del material de que éste fue fabricado. En el SI la rigidez se mide en NEWTONES POR METRO (N/m).

La fórmula (1) expresa la LEY DE HOOKE: la fuerza elástica, que aparece al deformar un cuerpo (muelle), es proporcional a su alargamiento y está dirigida en sentido contrario a la dirección del desplazamiento de las partículas del cuerpo durante la deformación.

De lo dicho, queda claro, que la fuerza elástica depende de las *coordenadas* de unas partes del cuerpo respecto de otras.

¿Pero cómo surge la propia deformación del cuerpo?

LA CAUSA DE LA DEFORMACIÓN ES EL MOVIMIENTO. Tomemos dos carritos en cuyas partes delanteras están fijadas bolitas de caucho blando (fig. 98). Pongamos en movimiento los carritos al encuentro de forma que choquen de frente. Cuando las bolitas entran en contacto, las dos varían su forma, es decir, se deforman. Al mismo tiempo, las velocidades de los carritos, en los que están sujetas las bolitas, comienzan a disminuir gradualmente. A fin de cuentas, los carritos se pararán un instante y, seguidamente, empezarán a moverse hacia atrás, variando la dirección de sus aceleraciones. Está claro, que la causa de la aceleración es la fuerza elástica, surgida durante la deformación de las bolitas. De este experimento se deduce que la deformación se produjo a consecuencia de que, después de entrar en contacto, las bolitas siguieron aún cierto tiempo avanzando en la dirección inicial, hasta que tuvo lugar su parada a cuenta de la fuerza elástica surgida a causa de la deformación. Acto seguido, las bolitas deformadas, restableciendo su forma, obligaron a que los carritos se moviesen en sentido opuesto. Pero en el instante en que las bolitas restablecieron su forma, desapareció la fuerza elástica. Por lo tanto, podemos decir que *la causa de la deformación de la bolita fue el movimiento de*

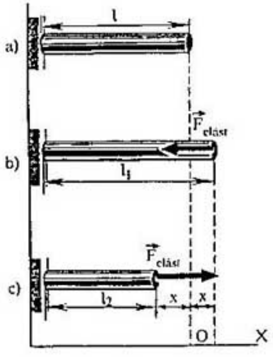


Fig. 97

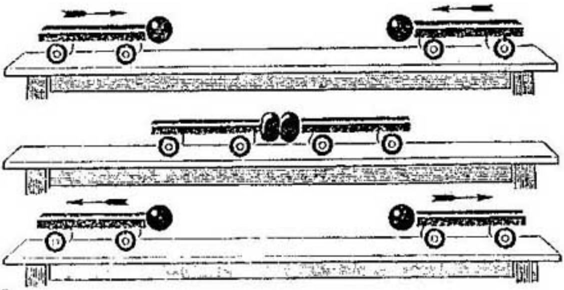


Fig. 98

una de sus partes respecto de otra, mientras que como efecto de la deformación apareció la fuerza elástica.

Si ahora sustituimos las bolitas de caucho por otras de acero y repetimos el experimento, veremos que el resultado será el mismo. Los carritos chocarán, se pararán un instante y, a continuación, comenzarán a moverse en direcciones opuestas. Pero ahora no veremos la variación de la forma de las bolitas, su deformación. Esto no significa que ésta no existe, ya que los carritos con las bolitas de acero se comportan igual en absoluto que los carritos con bolitas de caucho. Lo que pasa, es que las deformaciones de las bolitas de acero son muy pequeñas y no pueden ser advertidas sin instrumentos especiales (esto significa, que la rigidez de las bolitas de acero es mucho mayor que la correspondiente a las de caucho).

Con gran frecuencia, pasan desapercibidas no sólo las deformaciones, sino que también los movimientos que las provocan. Por ejemplo, cuando sobre la mesa vemos un libro (o cualquier otra carga), está claro que no podemos advertir que tanto la carga, como la mesa se deforman ligeramente. No obstante, precisamente la deformación de la mesa, inadvertida a simple vista, conduce a la aparición de la fuerza elástica, dirigida hacia arriba de modo vertical, que equilibra la fuerza de atracción de la carga hacia la Tierra. Por esta causa, dicha carga se encuentra en reposo. Cuando ponemos la carga sobre la mesa, bajo la acción de la atracción hacia la Tierra, aquélla comienza a moverse verticalmente hacia abajo, como todo cuerpo que cae. Justamente durante dicho movimiento, la carga desplaza las partículas que constituyen la parte de la mesa que entra en contacto con la primera. La mesa se deforma y surge la fuerza elástica que es igual a la fuerza de atracción de la carga hacia la Tierra, pero dirigida hacia arriba.

Si ponemos la carga sobre una junta de caucho blando, veremos a simple vista tanto el desplazamiento, como la deformación final del caucho (fig. 99).

Lo mismo podemos decir acerca del efecto de la suspensión AK (figs. 100, 101).

En muchos casos, las deformaciones que conducen al surgimiento de la fuerza elástica se perciben bien. Se ven con facilidad el alargamiento de un muelle espiral o de un cordón de caucho. Con auyda de la filmación rápida

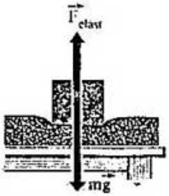


Fig. 99

Fig. 100

Fig. 101

podemos incluso observar la deformación de un balón de fútbol a causa del golpe del futbolista. En la foto de la pág. 234 se muestra qué forma adquiere dicho objeto redondo en el instante del golpe. También pierde su forma esférica la pelota de tenis al golpearla con la raqueta.

La fuerza elástica que actúa sobre el cuerpo por parte del apoyo o la suspensión, recibe el nombre de FUERZA DE LA REACCIÓN DEL APOYO O FUERZA DE LA REACCIÓN DE LA SUSPENSIÓN (o bien TENSIÓN DE LA SUSPENSIÓN).

Los ejemplos que hemos aducido muestran que la fuerza elástica surge cuando los cuerpos en interacción entran en contacto. Se sobreentiende que se deforman ambos cuerpos.

Una importante singularidad de la fuerza elástica consiste en que está dirigida *perpendicularmente* a la superficie de contacto de los cuerpos en interacción, además, si entre estos últimos figuran tales cuerpos como muelles comprimidos o alargados, la fuerza elástica resulta dirigida a lo largo de sus ejes.

¿ ?

1. Enumerar los tipos de interacciones que existen en la naturaleza. ¿A cuál de ellas se refiere la interacción que conduce a la aparición de la fuerza elástica?
2. ¿Cuáles de las fuerzas indicadas al principio de este capítulo son elásticas?
3. ¿Bajo qué condiciones surgen las fuerzas elásticas?
4. ¿Bajo qué condiciones surgen las deformaciones de los cuerpos?
5. En la fig. 102 viene representado un arquero dispuesto a disparar la flecha. ¿Cómo están dirigidas las fuerzas elásticas que comunican a la flecha la aceleración?
6. En un plano inclinado se encuentra en reposo una pesa (fig. 103). ¿Actúa sobre ella la fuerza elástica? ¿La deformación de qué cuerpo la provoca?
7. ¿Qué es la reacción del apoyo?
8. ¿En qué consiste la ley de Hooke?

Ejercicios 15

1. De un muelle vertical, con el extremo superior fijado, está suspendida una carga de 0,1 kg de masa. Después de cesar las oscilaciones de ella, resultó que el muelle se alargó 2 cm. ¿Cuál es la rigidez del muelle?
2. Dos carritos idénticos de 100 g de masa cada uno, están ligados mediante un muelle comprimido. La longitud del muelle (comprimido) es de 6 cm. La rigidez del muelle es igual a 30 N/m. Después de que el

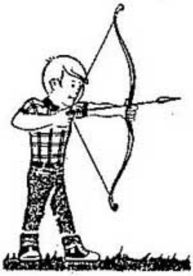


Fig. 102

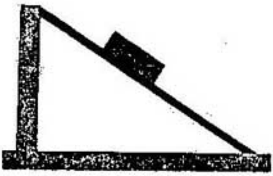


Fig. 103

muelle se liberó, los carritos se "separaron" con una aceleración de 6 m/s^2. Hallar la longitud del muelle no deformado.

Tarea

Explicar el motivo de la aparición de la fuerza $\vec{F}_{\text{eläst}}$ en el experimento mostrado en las figs. 100, 101.

5.2. Fuerza de gravitación universal

Newton descubrió las leyes de movimiento de los cuerpos. De acuerdo con ellas, el movimiento con aceleración sólo es posible bajo la acción de una fuerza. En vista de que los cuerpos que caen se mueven con aceleración, sobre ellos debe actuar una fuerza dirigida hacia abajo, hacia la Tierra. ¿Pero, es sólo la Tierra la que posee la propiedad de atraer hacia sí los cuerpos que se encuentran cerca de su superficie? En 1667 Newton expresó la suposición de que las fuerzas de atracción actúan, en general, entre todos los cuerpos. El sabio las denominó FUERZAS DE GRAVITACION UNIVERSAL.

¿Por qué no advertimos la atracción mutua entre los cuerpos que nos rodean? ¿Quizás la explicación radica en que las fuerzas de atracción entre ellos son demasiado pequeñas?

Newton logró mostrar que la fuerza de atracción entre los cuerpos depende de la masa de ambos, resultando así que alcanza notorio valor únicamente cuando los cuerpos en interacción (o por lo menos uno de ellos) tienen una masa suficientemente grande!

PAPEL DE LA MASA DE LOS CUERPOS QUE SE ATRAEN. La aceleración de la caida libre se distingue por la curiosa singularidad de que en el lugar dado es igual para todos los cuerpos, independientemente de su masa. ¿Cómo explicar esta extraña propiedad?

La única explicación que podemos hallar al hecho de que la aceleración no depende de la masa, consiste en que la propia *fuerza $\vec{F}$, con la que la Tierra atrae al cuerpo, es proporcional a su masa m.*

En efecto, en este caso el aumento de la masa m, digamos, al doble, proporcionará el incremento del módulo de la fuerza $\vec{F}$, duplicándolo, mientras que la aceleración, igual a la razón F/m, quedará invariable. Newton llegó a la única conclusión correcta: la fuerza de gravitación universal es proporcional a la masa del cuerpo sobre el que actúa. Pero los cuerpos se atraen mutuamente. Además según la tercera ley de Newton, sobre los dos cuerpos que se atraen actúan fuerzas de igual módulo. Esto significa que la fuerza de atracción mutua debe ser proporcional a la masa de cada uno de los cuerpos que se atraen. En tal caso ambos cuerpos recibirán aceleraciones que no dependen de sus masas. Si la fuerza es proporcional a la masa de cada uno de los cuerpos en interacción, quiere decir que ella *es porporcional al producto de las masas de ambos cuerpos.*

¿De qué depende la fuerza de atracción mutua de dos cuerpos?

FUNCIÓN QUE DESEMPEÑA LA DISTANCIA ENTRE LOS CUERPOS. Newton supuso que la fuerza de atracción mutua de dos cuerpos debe depender de la distancia entre ellos. De la práctica es bien conocido, que junto a la Tierra, la aceleración de la caída libre es igual a 9,8 m/s^2, siendo ésta la misma para los cuerpos que caen desde alturas de 1, 10 ó 100 m. Pero de este hecho no se puede llegar a la conclusión de que la aceleración no depende de la distancia hasta la Tierra. Newton consideraba que la distancia no se debía contar desde la superficie terrestre, sino que desde su centro. Pero el radio del globo terráqueo es igual a 6400 km. Por esta razón, queda claro que unas cuantas decenas o centenas de metros sobre la superficie de nuestro planeta no pueden variar notoriamente la aceleración de la caída libre.

Para aclarar cómo influye la distancia entre los cuerpos sobre la fuerza de su atracción mutua, hay que conocer con qué aceleración se mueven los cuerpos alejados de la superficie de la Tierra a grandes distancias.

Es natural que sea difícil medir la aceleración de la caída libre de cuerpos que se encuentran a una altura de miles de kilómetros sobre la superficie de la Tierra. Resulta más cómodo medir la aceleración centrípeta de un cuerpo que gira en torno de nuestro planeta, describiendo una circunferencia bajo la acción de la fuerza de atracción hacia la Tierra. Recordemos que este procedimiento fue empleado al estudiar las fuerzas elásticas. Mediamos la aceleración centrípeta de un cilindro en movimiento sobre una circunferencia bajo la acción de dicha fuerza (véase 4.6).

La propia naturaleza ha venido en ayuda de los físicos, al estudiar las fuerzas de gravitación universal, y ofreció la posibilidad de determinar la aceleración de un cuerpo en movimiento sobre una circunferencia alrededor de la Tierra. Este cuerpo es el satélite natural de nuestro planeta, es decir, la Luna. En verdad, si es cierta la suposición de Newton, hay que considerar que la aceleración centrípeta durante el movimiento siguiendo una circunferencia en torno de la Tierra, es comunicada a la Luna por la fuerza de atracción del planeta a la que está sometido nuestro satélite. Si la fuerza de gravitación entre los mencionados cuerpos celestes no dependiera de la distancia que los separa, la aceleración centrípeta de la Luna, sería la misma que la aceleración de la caída libre de los cuerpos en las cercanías de la superficie de la Tierra. En la realidad, la aceleración centrípeta con la que la Luna se mueve por su órbita, como ya sabemos, es igual a 0,0027 m/s^2 (véase en el ejercicio 10 el problema 6), lo que es unas 3600 veces menor que la aceleración de los cuerpos que caen cerca de la Tierra. Al mismo tiempo, es conocido que la distancia desde el centro del planeta hasta el del satélite constituye unos 384 000 km. Esto es 60 veces mayor que el radio de la Tierra, o sea, que la distancia desde el centro de ésta hasta la superficie de la misma.

Así pues, al aumentar 60 veces la distancia entre los cuerpos que se atraen, se produce la disminución de la aceleración 60^2 veces.

De aquí se puede llegar a la conclusión de que la aceleración comunicada a los cuerpos por la fuerza de gravitación universal y, por lo tanto, la propia fuerza, es razón inversa del cuadrado de la distancia entre los cuerpos en interacción. A semejante deducción llegó Newton.

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL. Por consiguiente, podemos, escribir que dos cuerpos de masas M y m se atraen entre sí con una fuerza $\vec{F}$, cuyo módulo se expresa mediante la fórmula

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{1}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos; G, un coeficiente de proporcionalidad, igual para todos los cuerpos en la naturaleza. Este coeficiente recibe el nombre de CONSTANTE DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL o bien CONSTANTE GRAVITACIONAL.

La fórmula aducida expresa la LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL descubierta por Newton.

Todos los cuerpos se atraen entre sí con una fuerza cuyo módulo es razón directa del producto de sus masas y razón inversa del cuadrado de la distancia que los separa.

Bajo la acción de la fuerza de gravitación universal se mueven tanto los planetas en torno del Sol, como los satélites artificiales alrededor de la Tierra.

¿Pero qué deberá entenderse por la distancia entre los cuerpos en interacción?

Resulta que la fórmula (1), que expresa la ley de gravitación universal, es justa cuando la distancia entre los cuerpos es tan grande en comparación con sus dimensiones, que aquéllos pueden ser considerados como puntos materiales. Dicha fuerza está dirigida a lo largo de la línea que une dichos puntos. Al realizar cálculos de la fuerza de gravitación, la Tierra, la Luna, los planetas y el Sol pueden ser considerados como puntos materiales.

Si los cuerpos tienen forma de esferas, incluso para el caso en que sus dimensiones son comparables con la distancia entre ellos, los mismos se atraen mutuamente como si fueran puntos materiales situados en los centros de las esferas. En tal caso, r es la distancia entre los centros de las esferas y la fuerza está dirigida a lo largo de la línea que une sus centros.

La fórmula (1) también puede ser utilizada al calcular la fuerza de atracción entre una esfera de radio grande y un cuerpo de forma tomada al azar, pero de pequeñas dimensiones, que se encuentra cerca de la superficie de la esfera. Entonces pueden ser despreciadas las dimensiones del cuerpo en comparación con el radio de la esfera. Precisamente así, es como obramos cuando examinamos la atracción de diversos cuerpos por el globo terráqueo. En semejante caso r en la fórmula (1) es el radio de la Tierra.

La fuerza de gravitacion es un ejemplo más de fuerza que depende de la disposición mutua de los cuerpos en interacción, es decir, de sus coordenadas, ya que ella es función de la distancia r entre los cuerpos.

5.3. Constante de gravitación universal

En la fórmula que expresa la ley de gravitación universal de Newton figura el coeficiente G, es decir, la constante de gravitación universal. ¿Qué representa en sí esta magnitud?

El coeficiente G tiene un sentido claro y sencillo. Si las masas de los dos cuerpos en interacción M y m son iguales a la unidad ($M = m = 1$ kg) y la distancia r entre ellos también es igual a la unidad ($r = 1$ m), como se deduce de la fórmula (1)

$$F = G.$$

La constante de gravitación universal es numéricamente igual al módulo de la fuerza de atracción entre dos cuerpos (puntos materiales) de 1 kg *de masa, cuando la distancia entre ellos es igual a* 1 m.

¿En qué unidades se expresa la constante G? De la fórmula para la ley de gravitación universal se desprende que

$$G = \frac{Fr^2}{Mm}.$$

Si la fuerza se mide en newtones (N), la distancia en metros (m) y la masa en kilogramos (kg), la magnitud del segundo miembro de la igualdad se expresará

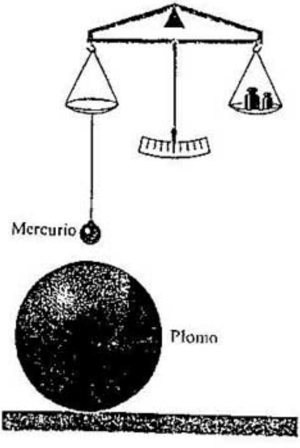


Fig. 104

en $N \cdot m^2/kg^2$. Pero en toda fórmula, si es correcta, las magnitudes en los dos miembros de la igualdad deben medirse en iguales unidades (por ejemplo, 5 m, no pueden ser iguales a 5 kg). De aquí se deduce que la constante G debe estar expresada en $N \cdot m^2/kg^2$.

En lo que atañe al valor numérico de la constante de gravitación universal, sólo puede ser determinado con ayuda de experimentos, en los que, como es lógico, de algún modo se mida la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre uno de los cuerpos de masa conocida m_1 y m_2, separados a una distancia r conocida.

Semejantes experimentos fueron realizados múltiples veces. Uno de ellos consistía en lo siguiente. Hacia uno de los platillos de una sensible balanza, de un largo hilo, se colgaba una bola de vidrio llena de mercurio (fig. 104). En el otro platillo se ponían pesas que equilibraban la balanza. Después de realizar minuciosamente esta operación debajo de la bola con mercurio se instalaba una bola de plomo de gran masa (cerca de 6000 kg). A causa de la atracción de la bola de mercurio por la de plomo, el equilibrio de la balanza se perturbaba. Con el fin de restablecer el equilibrio de la balanza, fue necesario añadir una pesa más en el platillo con las pesas. Por lo visto, la fuerza de atracción de esta pesa adicional por la Tierra será igual a la fuerza de atracción de la bola de mercurio por la de plomo, es decir,

$$F = G\frac{m_{pl}\, m_{mer}}{r^2}.$$

Aquí m_{pl} es la masa de la bola de plomo; m_{mer}, la masa de la bola de mercurio; r, la distancia entre sus centros. De aquí, se calcula con facilidad el valor de G:

$$G = \frac{Fr^2}{m_{pl}\, m_{mer}}.$$

De éste y de otros muchos experimentos, fue obtenido el valor de la constante G

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Esta magnitud es muy pequeña. Precisamente, gracias a que es tan pequeña no notamos la atracción entre los cuerpos que nos rodean. En efecto, incluso dos esferas cada una con masa de una tonelada que distan 1 m se atraen entre sí con una fuerza igual a 6,67 cienmilésimas de newton.

¿ ?

1. ¿Cómo variará la fuerza de atracción entre dos esferas, si: a) una de ellas se sustituye por otra, cuya masa es dos veces mayor; b) se sustituye también la segunda esfera por otra de doble masa?
2. ¿Cómo variará la fuerza de atracción entre dos esferas si la distancia que las separa se duplica?
3. Los cuerpos que se encuentran en la superficie de la Tierra se atraen mutuamente. ¿Por qué no lo notamos?
4. ¿Qué fuerza obliga a la Tierra y a otros planetas a moverse alrededor del Sol?

Ejercicios 16

1. En el experimento descrito en este parágrafo, la masa de la bola de mercurio era igual a 5 kg, su radio, 4,5 cm, la masa de la bola de plomo, 6 t, su radio, 0,5 m. ¿Cuál ha de ser la masa de la pesa que es preciso añadir al platillo derecho de la balanza, para equilibrar la fuerza de atracción entre las bolas de plomo y de mercurio?
2. Dos naves con una masa de 50 000 t cada una se encuentran en la rada de un puerto a una distancia de 1 km una de otra. ¿Cuál será la fuerza de atracción entre ellas?
3. Calcular la fuerza de atracción entre la Luna y la Tierra. La masa de la Luna es $m_L \approx 7 \cdot 10^{22}$ kg, la masa de la Tierra, $m_T \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg, la distancia entre ellas se considera igual a $3{,}84 \cdot 10^8$ m.
4. Un cosmonauta descendió sobre la Luna. Lo atraen tanto ésta, como la Tierra. ¿Cuántas veces es mayor la fuerza de atracción del cosmonauta hacia la Luna que hacia la Tierra? El radio de la Luna es igual a 1730 km.
5. ¿A qué distancia de la superficie de la Tierra la aceleración de la caída libre de los cuerpos a nuestro planeta es igual a 4,9 m/s²?

5.4. Fuerza de gravedad. Peso de un cuerpo

FUERZA DE GRAVEDAD. Una de las manifestaciones de la fuerza de gravitación universal, es la fuerza de gravedad, o sea, la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos. Designemos la masa de la Tierra por M y su radio por R, la masa del cuerpo dado por m. Entonces, de acuerdo con la ley de gravitación universal, la fuerza que actúa sobre el cuerpo en las proximidades del planeta será:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}. \tag{1}$$

Así obtuvimos la fuerza de gravedad, dirigida al centro de la Tierra.

Si sobre el cuerpo actúa sólo esta fuerza (todas las demás están equilibradas), él realiza la caída libre. La aceleración de la caída libre se puede hallar haciendo uso de la segunda ley de Newton:

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{Mm}{R^2 m} = G\frac{M}{R^2}. \tag{2}$$

De aquí vemos que *la aceleración de la caída libre $\vec{g}$ no depende de la masa m del cuerpo y*, por lo tanto, es igual para todos los cuerpos. Ahora podemos escribir que la fuerza de gravedad

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}.}$$

Esta expresión para la fuerza de gravedad ya la habíamos deducido antes (véase 4.6).

La fuerza de gravedad, que actúa sobre el cuerpo, es igual al producto de la masa de éste por la aceleración de la caída libre.

¿CUÁNDO NO SE CUMPLE LA FÓRMULA (2)? Hablando en rigor, la fórmula (2), lo mismo que la segunda ley de Newton, es justa cuando la caída libre se considera con relación a un sistema inercial de referencia. En la superficie de la Tierra pueden ser considerados inerciales los sistemas de referencia que están relacionados con los polos del planeta, puesto que éstos no toman parte en su rotación diaria. Todos los demás puntos de la superficie terrestre se mueven describiendo circunferencias con aceleraciones centrípetas, por lo que los sistemas de referencia ligados a estos puntos no son inerciales. Para ellos no puede ser aplicada la segunda ley de Newton.

La rotación de la Tierra conduce a que la aceleración de la caída libre, medida con relación a cierto cuerpo en la superficie terrestre, es distinta en diferentes latitudes.

Otra causa, aunque de menor importancia, de que la aceleración de la caída libre en diversos puntos de la Tierra es distinta, viene relacionada con que el globo terráqueo está ligeramente aplanado en los polos.

Los experimentos muestran que la aceleración de la caída libre, medida respecto de la superficie de la Tierra junto a los polos, es igual a unos 9,83 m/s^2, en el ecuador, 9,78 m/s^2, en la latitud de 45°, 9,81 m/s^2.

Los valores numéricos aducidos nos muestran que la aceleración de la caída libre, en diversas regiones del globo terrestre, difieren muy poco y son muy próximos al valor calculado por la fórmula

$$g = G\frac{M}{R^2} \approx 9{,}83 \text{ m/s}^2.$$

Por esta causa, al realizar cálculos aproximados, se menosprecia el hecho de que el sistema de referencia relacionado con la superficie de la Tierra no es inercial (es decir, no se tiene en cuenta la rotación del globo terráqueo), así como el hecho de que la forma de la Tierra no es del todo esférica. La aceleración de la caída libre se considera igual dondequiera y se calcula aplicando la fórmula (2).

En ciertas regiones de la esfera terrestre, la aceleración de la caída libre difiere del valor aducido más arriba por otra causa más. Semejantes discrepancias se observan en aquellos lugares, donde en las entrañas de la Tierra yacen minerales cuya densidad es mayor o menor que la media para la Tierra. Allí, donde hay yacimientos de minerales más densos, el valor de g es mayor. Esto permite a los geólogos hallar los yacimientos de minerales midiendo el valor de g.

Por último, la fuerza de gravedad y, por lo tanto la aceleración de la caída libre, varían al alejarse de la superficie terrestre. Si el cuerpo se encuentra a la altura h sobre dicha superficie, la expresión para el módulo de la aceleración g, deberá escribirse en la forma

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Por ejemplo, al subir a una altura de 300 km la aceleración de la caída libre disminuye 1 m/s^2. De la fórmula aducida se infiere que, siendo las alturas sobre la Tierra no sólo de varias decenas o bien centenas de metros, sino que incluso de muchos kilómetros, la fuerza de gravedad puede considerarse constante, independiente de la posición del cuerpo. Sólo por esta causa, la caída libre cerca de la Tierra se puede considerar como *movimiento uniformemente variado.*

PESO DE UN CUERPO. Recordemos (véase A.V. Piórishkin, N.A. Ródina. Física 1) que la fuerza de gravedad, que actúa sobre un cuerpo, debe distinguirse del peso del cuerpo. Se denomina peso de un cuerpo la fuerza con la que éste actúa sobre el apoyo o suspensión a causa de su atracción hacia la Tierra. Por eso, hay que tener presente que el peso del cuerpo y la fuerza de gravedad siempre están aplicados a diferentes cuerpos. El peso del cuerpo es una fuerza provocada por su deformación al estar en interacción con el apoyo o bien la suspensión.

MEDICIÓN DE LA MASA DEL CUERPO MEDIANTE SU PESAJE. En el capítulo cuarto hemos llegado a saber que podemos determinar la masa de un cuerpo, midiendo la razón de los módulos de las aceleraciones durante la interacción del cuerpo dado con otro cuerpo tomado como patrón de masa. Es evidente que este método es muy incómodo y, por regla, no se utiliza en la práctica. Vamos a examinar otro procedimiento, mucho más cómodo, para medir la masa. Este procedimiento recibe el nombre de PESAJE. La determinación de la masa según dicho método se basa en que la fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo y la masa de éste son proporcionales entre sí:

$$F = mg.$$

La fuerza de gravedad puede ser medida con una balanza, ya que por su módulo es igual al peso del cuerpo, si la balanza junto con el cuerpo que se pesa está en reposo o bien en movimiento rectilíneo y uniforme respecto de la Tierra. Por eso, midiendo el peso del cuerpo $P = F$ en una balanza de resorte y conociendo la aceleración de la caída libre $\vec{g}$, en el lugar donde se realiza el pesaje, es posible calcular la masa empleando la fórmula

$$m = \frac{P}{g}.$$

Es más cómodo aún determinar la masa pesando el cuerpo en una balanza de brazos, en la que se compara el peso del cuerpo y el correspondiente a las pesas. Cuando la balanza está equilibrada, se puede afirmar que el peso del cuerpo es igual al de las pesas. Pero si los pesos de los cuerpos son iguales, lo son también sus masas. Como en las pesas se indican, precisamente, sus masas, la masa del cuerpo se obtiene sumando simplemente los números indicados en las pesas.

La balanza de brazos es un instrumento muy sensible. La menor masa, que puede apreciarse con una balanza de precisión, constituye millonésimas de gramo.

PROBLEMA. Calcular la masa de la Tierra si conocemos la aceleración de la caída libre cerca de su superficie.

Solución. Como es lógico, la masa de la Tierra no puede ser medida poniéndola sobre una balanza. Pero su cálculo es posible haciendo uso de la fórmula para la aceleración de la caída libre:

$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

De aquí, la masa de la Tierra

$$M = \frac{gR^2}{G}.$$

Los valores numéricos de g y G fueron determinados a su tiempo por vía experimental:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$$

y

$$g = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

El radio medio de la Tierra también es conocido:

$$R = 6370\ \mathrm{km} = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}.$$

Poniendo los valores de g, R y G en la fórmula para M, obtenemos:

$$M = \frac{9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}(6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

¡La masa de la Tierra es casi igual a seis cuatrillones de kilogramos!

¿ ?

1. ¿Qué se llama fuerza de gravedad?
2. La aceleración de la caída libre de los cuerpos no depende de su masa. ¿Ocurre lo mismo con la fuerza de gravedad?
3. ¿Es igual la fuerza de gravedad en todos los lugares del globo terrestre?
4. ¿Influye la rotación de la Tierra en torno de su eje sobre la fuerza de gravedad?
5. ¿Variará la fuerza de gravedad que actúa sobre un cuerpo, al alejarlo de la superficie de la Tierra?
6. ¿Cómo está dirigida la fuerza de gravedad que actúa sobre cualquier cuerpo?
7. ¿En qué consiste la diferencia entre el peso del cuerpo y la fuerza de gravedad aplicada a él?

Ejercicios 17

1. ¿Cuál será la masa del cuerpo, si la fuerza de gravedad que actúa sobre él es igual a 49 N? El cuerpo se encuentra cerca de la superficie de la Tierra.
2. ¿A qué altura sobre la Tierra, la fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo disminuye dos veces?
3. Hallar la fuerza de atracción que actúa sobre un cuerpo de 1 kg de masa en las proximidades de la superficie de la Luna. ¿En cuántas veces diferirá la fuerza de gravedad que sobre ese mismo cuerpo actúa junto a la superficie de la Tierra?
4. Calcular la aceleración de la caída libre de los cuerpos en las proximidades de la superficie de Marte. La masa de Marte es igual a $6 \cdot 10^{23}$ kg, su radio, 3300 km.

5.5. Fuerza de rozamiento. Rozamiento en reposo o estático

Ya hemos hablado de una de las manifestaciones de las interacciones eléctricas entre los cuerpos, a saber, de la fuerza elástica. Otra de las manifestaciones de dichas interacciones es la fuerza de rozamiento, a la que nos hemos referido más de una vez. Es necesario hablar de ella, ya que en las condiciones terrestres acompaña a todo movimiento de los cuerpos. A consecuencia de la fuerza de rozamiento el movimiento de los cuerpos, al fin y al cabo, cesa, claró está si es que sobre el cuerpo no actúan algunas de las demás fuerzas, por ejemplo, la elástica o de gravedad.

Recordemos (véase A. V. Piórishkin, N. A. Ródina. Física 1) que la fuerza de rozamiento surge durante el contacto directo de los cuerpos y siempre está dirigida a lo largo de la superficie de contacto, a diferencia de la fuerza elástica, dirigida en sentido perpendicular a dicha superficie.

Estudiemos en un experimento el proceso de aparición de la fuerza de rozamiento. En la foto (fig. 105) se muestra el instrumento para realizar el experimento. En el cuerpo situado sobre el soporte, está fijado el dinamómetro, de cuyo cordón tiramos con la mano. En la fig. 106 viene representado el esquema del experimento, en el que la acción de la mano se ha sustituido por la de una pesa, fijada de un cordón que pasa por una polea. Sobre el cuerpo actúan las siguientes fuerzas: la fuerza $\vec{F}$ *paralela a la superficie de contacto* de aquél con la mesa. Esta fuerza es la que muestra el dinamómetro. Además, sobre el cuerpo actúa la fuerza de gravedad (en la fig. 106 no se muestra) y la fuerza de la reacción del apoyo $\vec{N}$, que la equilibra, esta última viene provocada por la deformación de la mesa y está dirigida en sentido *perpendicular* a la superficie de contacto del cuerpo con la mesa. Si la pesa no es lo suficientemente grande, el cuerpo permanece en reposo. Esto significa que, junto con la fuerza $\vec{F}$, sobre el cuerpo actúa una fuerza más $\vec{F}_{roz}$, del mismo valor numérico, pero dirigida en sentido contrario:

$$\vec{F}_{roz} = -\vec{F}.$$

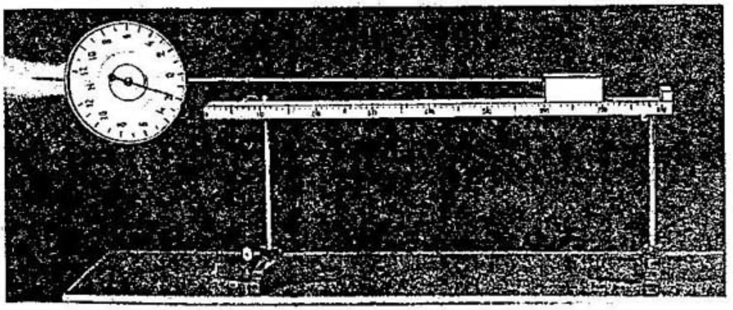


Fig. 105

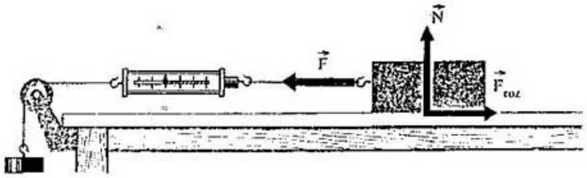


Fig. 106

Precisamente esta fuerza es la llamada FUERZA DE ROZAMIENTO EN REPOSO O ESTÁTICO.

Aumentemos la carga, añadiéndole una pesa más grande. El dinamómetro mostrará que la fuerza $\vec{F}$ ha aumentado. Pero el cuerpo sigue en reposo. Quiere decir, que junto con la fuerza $\vec{F}$ también ha crecido la fuerza de rozamiento en reposo, ya que lo mismo que antes, las dos fuerzas son del mismo módulo y su dirección es opuesta. En esto consiste la singularidad fundamental de la fuerza de rozamiento en reposo.

La fuerza de rozamiento estático es siempre de igual módulo y de dirección opuesta a la fuerza aplicada al cuerpo en sentido paralelo a la superficie de contacto de éste con otro cuerpo.

Por último, con cierto valor determinado de la masa de la carga y, por lo tanto, de su peso, el cuerpo se pone en movimiento y comienza a deslizarse. Esto significa que existe una fuerza de rozamiento en reposo máxima $\vec{F}_{roz.\,máx}$. Además únicamente en caso de que la fuerza $\vec{F}$ paralela a la superficie llegue a ser aunque sólo sea un poco mayor que la primera, el cuerpo recibirá aceleración.

La fuerza de rozamiento estático es, justamente, la fuerza que nos dificulta mover objetos pesados: un armario, una mesa, un cajón, etc.

¿Pero, por qué es de importancia el hecho de que el objeto sea pesado? A fin de cuentas, no lo movemos hacia arriba, o sea, en contra de la fuerza de gravedad. A esta pregunta hallaremos respuesta en un experimento.

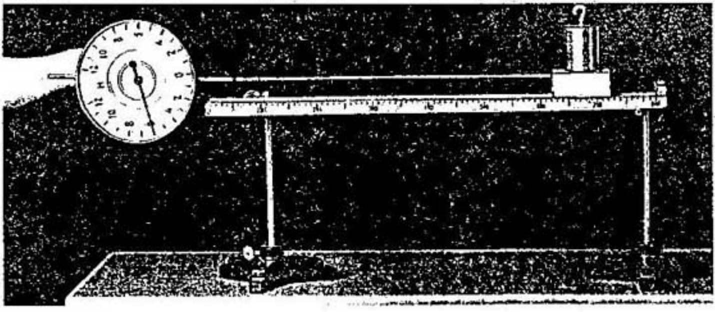


Fig. 107

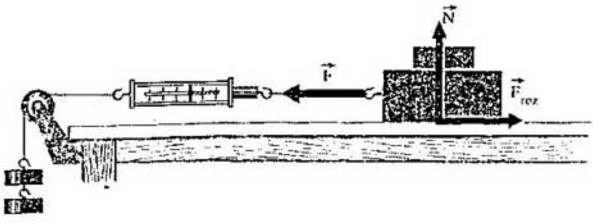


Fig. 108

Coloquemos sobre el cuerpo cierta carga, con el fin de apretarlo a la mesa con más fuerza (figs. 107, 108) (en lugar de esto podemos presionarlo con la mano, con un muelle, etc.). De este modo aumentamos la fuerza dirigida perpendicularmente a la superficie de contacto entre el cuerpo y la mesa. Dicha fuerza recibe el nombre de FUERZA DE PRESIÓN. Si ahora de nuevo medimos la fuerza máxima de rozamiento en reposo, es decir, la fuerza necesaria para que el cuerpo comience a deslizarse, observaremos que aumentó tantas veces como creció la fuerza de presión.

La fuerza máxima de rozamiento en reposo es proporcional a la fuerza de presión.

Según la tercera ley de Newton, la fuerza de presión del cuerpo sobre el apoyo es, según el módulo, igual a la reacción del apoyo. Por esta razón, la fuerza máxima de rozamiento en reposo es proporcional a la fuerza de la reacción del apoyo. Por consiguiente, para los módulos de dichas fuerzas podemos escribir:

$$F_{roz.\ máx} = \mu N,$$

donde μ (letra griega "my") es un coeficiente de proporcionalidad, llamado COEFICIENTE DE ROZAMIENTO.

EL ROZAMIENTO NO SIEMPRE ES OBSTÁCULO PARA EL MOVIMIENTO. Hemos dicho que la fuerza de rozamiento obstaculiza el comienzo del movimiento. Pero, por otro lado, hay casos en que la fuerza de rozamiento en reposo es la causa del movimiento del cuerpo. Así, por ejemplo, al andar es precisamente la fuerza de rozamiento en reposo $\vec{F}_1$, que actúa sobre la suela, la que nos comunica la aceleración (fig. 109). La suela no se desliza hacia atrás y, por consiguiente, el rozamiento entre ella y el suelo es el rozamiento en reposo. Si la suela resbala, resulta imposible andar. En lo que atañe a la fuerza $\vec{F}_2$, igual y opuesta a $\vec{F}_1$, comunica la aceleración a la Tierra. De este mismo modo, las ruedas de un automóvil y de otros vehículos autopropulsados, parece como si se repelieran de la tierra y esta fuerza de repulsión es la de rozamiento en reposo.

Cuando en una transmisión por correa ésta obliga a girar a la polea (fig. 110), la fuerza que comunica la aceleración a la corona de la polea también es la de rozamiento en reposo entre la correa motriz y la polea.

Fig. 109

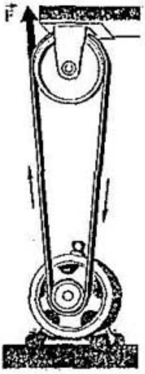


Fig. 110

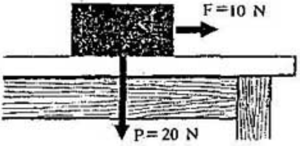


Fig. 111

¿ ?

1. Un niño empuja una librería con el máximo esfuerzo que puede desarrollar, pero no logra desplazarla. ¿Hay aquí o no violación de la segunda ley de Newton, de acuerdo con la cual un cuerpo sobre el que actúa una fuerza varía su velocidad?
2. ¿Actúa o no la fuerza de rozamiento sobre una mesa ubicada en la habitación?
3. ¿Durante qué circunstancias aparece la fuerza de rozamiento en reposo? ¿Cómo está dirigida esta fuerza?
4. ¿Qué es la fuerza de presión?

5.6. Fuerza de rozamiento de deslizamiento o cinemático

En el parágrafo anterior hemos aclarado que si la fuerza, aplicada hacia el cuerpo en sentido paralelo a su superficie de contacto con otro cuerpo, es aunque sólo sea un poco mayor que la fuerza máxima de rozamiento en reposo, el cuerpo adquiere aceleración y comienza a deslizarse por la superficie del otro cuerpo. Sin embargo, en semejante caso sobre el cuerpo también actúa la fuerza de rozamiento. Sólo que aquí tropezamos con FUERZA DE ROZAMIENTO DE DESLIZAMIENTO, también denominado ROZAMIENTO CINEMÁTICO. Las mediciones nos muestran que en módulo esta última es aproximadamente igual a la fuerza máxima de rozamiento en reposo. La fuerza de rozamiento de deslizamiento (que a continuación vamos a llamar simplemente fuerza de rozamiento) está siempre dirigida en sentido contrario a la velocidad relativa de los cuerpos en contacto. Esta es la singularidad más importante de la fuerza de rozamiento.

La dirección de la fuerza de rozamiento (cinemático) es opuesta al sentido de la velocidad de movimiento del cuerpo, con relación al que se encuentra en contacto.

La aceleración, comunicada al cuerpo por la fuerza de rozamiento, también tiene dirección opuesta a la de su velocidad relativa, es decir, la fuerza de rozamiento de deslizamiento siempre conduce a la disminución de la velocidad relativa del cuerpo.

Lo mismo que la fuerza máxima de rozamiento en reposo, la de deslizamiento es proporcional a la fuerza de presión (y por lo tanto, a la fuerza de la reacción del apoyo $\vec{N}$) que sobre el cuerpo actúa:

$$\boxed{F_{roz} = \mu N.}$$

El coeficiente de proporcionalidad μ es aquí el mismo que en la fórmula para la fuerza máxima de rozamiento en reposo.

De la fórmula para la fuerza de rozamiento, se desprende que μ es igual a la razón de los módulos de las fuerzas de rozamiento y de la reacción del apoyo:

$$\mu = \frac{F}{N}.$$

Por regla, este coeficiente es menor que la unidad. Esto significa que la fuerza de rozamiento es menor que la de presión. Por ejemplo, si el coeficiente de rozamiento sobre la superficie de la mesa (fig. 111) es igual a 0,5, quiere decir que siendo el peso de una barreta de 20 N, ésta puede ser puesta en movimiento y desplazada por la mesa, aplicándole una fuerza de 10 N.

El coeficiente de rozamiento caracteriza no sólo el cuerpo sobre el que actúa la fuerza de rozamiento, sino que al mismo tiempo los dos cuerpos que rozan uno con otro. Su valor depende de los materiales de los que están fabricados los cuerpos en contacto, de cómo están maquinadas sus superficies, de la rugosidad de éstas, etc. Los experimentos han mostrado que la fuerza de rozamiento no depende del área de las superficies en contacto y de la posición relativa de los cuerpos. Por ejemplo, el coeficiente de rozamiento del patín sobre el hielo es idéntico a lo largo de toda la pista, claro está, si la superficie del hielo es igual por doquiera. Así pues, la fuerza de rozamiento es una exclusión de la regla general, según la cual la fuerza, que actúa sobre un cuerpo, depende de la posición de éste respecto del cuerpo con el que está en interacción. Resulta que la fuerza de rozamiento depende no de la posición del cuerpo, sino que de *su velocidad*. Por otra parte, el módulo de la fuerza de rozamiento de dos sólidos poco depende también de su velocidad relativa. La dependencia entre la fuerza de rozamiento y la velocidad consiste en que, *al variar la dirección de la velocidad, cambia también el sentido de la fuerza de rozamiento.*

Para ciertos materiales, los valores del coeficiente de rozamiento se indican en la siguiente tabla:

Materiales	Coeficiente de rozamiento
Madera sobre madera	0,25
Caucho sobre hormigón	0,75
Correa de cuero sobre una polea de fundición	0,56
Acero sobre acero	0,20

Fig. 112

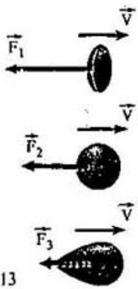


Fig. 113

Estos valores del coeficiente de rozamiento se refieren a las superficies sin engrase. Éste disminuye notoriamente la fuerza de rozamiento. Por ejemplo, el acero sobre acero con engrase se desliza con la misma facilidad que el acero sobre el hielo: el coeficiente de rozamiento constituye tan sólo 0,04. El rozamiento entre sólidos en contacto (sin engrase) recibe el NOMBRE DE SECO.

¿POR QUÉ EL ENGRASE DE LAS SUPERFICIES EN CONTACTO REDUCE EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO? La cuestión radica en que cuando los sólidos se mueven, haciendo contacto con líquidos o gases, también surge una fuerza paralela a la superficie de contacto y dirigida en sentido *opuesto* a la velocidad relativa de los cuerpos. Por este rasgo se parece a la fuerza de rozamiento seco. Con frecuencia, la denominan FUERZA DE ROZAMIENTO LÍQUIDO O VISCOSO. Pero por sus manifestaciones difiere de aquélla de manera notable. Es mucho menor que la fuerza de rozamiento seco, justamente por esto el engrase disminuye la fuerza de rozamiento. A veces, la fuerza de rozamiento líquido recibe el nombre de FUERZA DE RESISTENCIA.

Examinemos con mayor detalle la fuerza de resistencia que surge durante el movimiento de un cuerpo en el seno de un líquido o gas.

Al moverse un sólido en un líquido o gas, no aparece la fuerza de rozamiento en reposo. Esto quiere decir que incluso la más pequeña fuerza, aplicada al cuerpo, comunica a éste aceleración.

Por nuestra propia experiencia, muchos sabemos que, al estar en una balsa, con un pequeño esfuerzo es posible arrancar de la orilla empleando una pértiga. Pero con este mismo procedimiento, montados sobre la misma balsa, no merece la pena ni siquiera intentar moverse por tierra firme. La carencia de la fuerza de rozamiento estático en los líquidos puede observarse con facilidad en el siguiente experimento. Pongamos un trocito de madera sobre el agua contenida en un ancho recipiente (fig. 112). Resulta fácil ponerlo en movimiento (variar su velocidad) incluso con una pequeña fuerza: es suficiente soplar o bien empujarlo con una banda de papel. Pero si ponemos ese mismo trocito de madera sobre la mesa, sólo podremos ponerlo en movimiento aplicándole una fuerza bastante grande, que supere la fuerza máxima de rozamiento en reposo.

A diferencia de la fuerza de rozamiento seco, la de resistencia en un líquido o gas no sólo depende de la dirección, sino que también del módulo de la velocidad relativa del cuerpo y el líquido. A pequeñas velocidades, la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, mientras que a grandes velocidades es ya proporcional al cuadrado de la velocidad.

Además, la fuerza de resitencia depende en alto grado de la forma de los cuerpos.

En la fig. 113 se muestran tres cuerpos con iguales dimensiones de la sección transversal. Pero si éstos se mueven en el seno de un liquido o gas a las mismas velocidades, resultará que la mayor fuerza de resistencia actúa sobre la arandela plana (figura superior), la menor, sobre el cuerpo en forma de gota (figura inferior).-

La forma geométrica del cuerpo, con la que la fuerza de resistencia es pequeña, recibe el nombre de CURRENTILÍNEA O AERODINÁMICA. A los aviones, automóviles y otras máquinas que a grandes velocidades se mueven por el aire o el agua, tienden a darles forma aerodinámica, en tanto que sus superficies se alisan minuciosamente. Esto ayuda a reducir la fuerza de resistencia.

Cabe advertir, por último, que hasta el momento no está estudiada en plena medida la naturaleza de las fuerzas de rozamiento.

¿ ?

1. ¿Qué es la fuerza de rozamiento de deslizamiento (rozamiento seco)? ¿Cómo está dirigida?
2. ¿Qué es el coeficiente de rozamiento?
3. ¿Por qué es peligroso conducir un coche por una carretera helada?
4. ¿Qué fuerza debe estar aplicada al cuerpo, que yace sobre un plano horizontal, para ponerlo en movimiento por dicho plano?
5. La fuerza de rozamiento entre las ruedas de una bicicleta y el suelo casi no depende de la velocidad. Pero sabemos que cuanto mayor sea la velocidad que desarrolle el ciclista, tanto mayor fuerza muscular tiene que aplicar él sobre los pedales. ¿Con qué está ligado semejante fenómeno?
6. ¿Es necesario darles forma aerodinámica a las naves cósmicas? ¿Y a los cohetes que se lanzan a la órbita?
7. ¿Por qué a los tractores y apisonadoras no se les da forma aerodinámica?

Ejercicios 18

1. Calcular la fuerza con la que hay que empujar una barreta de madera de 20 kg de masa sobre un suelo de madera a velocidad constante. ¿Cómo se moverá la barreta si se le aplica una fuerza mayor que la calculada?
2. Durante un trabajo prolongado, un caballo desarrolla una fuerza de 600 N. ¿Qué carga máxima podrá transportar sobre un trineo, cuya masa es de 100 kg, si el coeficiente de rozamiento de los patines con la nieve es 0,05? Hay que considerar que las lanzas del trineo son paralelas al camino.
3. Una barreta de caucho está oprimida por un muelle contra una pared vertical de hormigón. La fuerza elástica del muelle es perpendicular a la pared y su módulo es igual a 100 N. ¿Qué fuerza hay que aplicar sobre la barreta para ponerla en movimiento?

Lo más importante en el quinto capítulo

Todas las fuerzas conocidas en la naturaleza son manifestaciones de pocos tipos de interacciones. Las fuerzas que se estudian en mecánica son la manifestación nada más que de dos interacciones: electromagnéticas y gravitatorias.

Las fuerzas elástica y de rozamiento son representaciones de la interacción electromagnética.

La fuerza elástica surge durante la deformación de un cuerpo a causa del desplazamiento de una de sus partes respecto de otras: la proyección de la fuerza elástica queda definida por la ecuación (ley de Hooke):

$$(F_{\text{elást}})_x = -kx$$

La fuerza de la gravitación universal es también manifestación de la interacción gravitatoria:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Las fuerzas elástica y de gravitación *dependen de la disposición mutua de los cuerpos en interacción, es decir, de sus coordenadas.*

La fuerza de atracción de los cuerpos por la Tierra, en las proximidades de su superficie, es igual a mg y puede considerarse constante, si las distancias de los cuerpos desde la superficie de la Tierra son pequeñas en comparación con el radio de nuestro planeta.

La fuerza de rozamiento surge entre los cuerpos en contacto, tanto entre los que se encuentran en reposo (rozamiento en reposo), como en movimiento (rozamiento de deslizamiento). Esta fuerza está dirigida *a lo largo de la superficie* de contacto, en sentido opuesto a la dirección del movimiento relativo de los cuerpos en contacto. La fuerza de rozamiento no depende de la coordenada de un cuerpo respecto del otro, sino que de su *velocidad relativa.*

6 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE DINÁMICA

PARA TODAS LAS FUERZAS EXISTEN LAS MISMAS LEYES DE MOVIMIENTO

Haciendo uso de las leyes de movimiento, descubiertas por Newton, y sabiendo medir o calcular las fuerzas, puede ser resuelto el problema fundamental de mecánica: partiendo de las fuerzas conocidas y las condiciones iniciales, se puede determinar la aceleración, conociendo ésta, la velocidad y, por fin, las coordenadas (posición) del cuerpo en todo momento de tiempo.

Rara vez se observa que sobre un cuerpo actúe sólo una fuerza, a saber: la elástica, de rozamiento o bien de gravedad. En la mayoría de los casos, sobre el cuerpo actúan de forma simultánea varias fuerzas. En semejante caso, la aceleración viene determinada por la resultante de todas las fuerzas aplicadas.

Pero puede ocurrir que, aunque el cuerpo está sometido al efecto de varias fuerzas, sólo una de ellas tenga importancia esencial. Las demás o se compensan entre sí, o bien por su valor absoluto son pequeñas.

Vamos, precisamente, a comenzar por semejantes casos.

6.1. Movimiento de un cuerpo bajo el efecto de la fuerza elástica

Para empezar, examinemos el caso cuando la velocidad inicial del cuerpo es igual a cero o bien está dirigida en paralelo a la fuerza elástica aplicada.

Ya sabemos que la proyección de esa fuerza sobre el eje X $(F_{\text{elást}})_x = -kx$. Esto significa que la fuerza $\vec{F}_{\text{elást}}$ varía al cambiar la posición del cuerpo al que está aplicada. Recordemos que el alargamiento de un muelle (o de cualquier otro cuerpo elástico) determina, justamente, la posición del cuerpo respecto al extremo de un muelle no deformado.

¿Cómo se mueve el cuerpo bajo el influjo de semejante fuerza variable? Esto lo podemos observar recurriendo a un experimento.

Fijemos el extremo de un muelle en un carrito sobre el que se encuentra un cuerpo macizo. El otro extremo del muelle lo sujetamos en la pared (fig. 114). Tirando del carrito lo desplazamos a varios centímetros, después de lo cual lo soltamos. Veremos que el carrito se moverá periódicamente a la derecha y a la izquierda respecto de su posición inicial. Semejante movimiento es llamado OSCILATORIO O VIBRATORIO.

Aún más sencillo resulta observar el movimiento vibratorio de un cuerpo al colgarlo de un muelle (fig. 115). Estirando el muelle a varios centímetros y soltándolo veremos que el cuerpo comenzará a realizar el movimiento vibratorio.

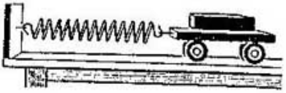


Fig. 114

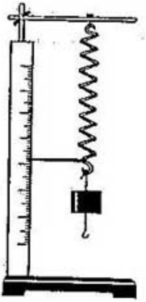


Fig. 115

Haciendo uso de la segunda ley de Newton, es posible hallar la posición del cuerpo en cualquier momento de tiempo. Pero semejante problema es complicado, ya que la fuerza elástica es una magnitud variable. El movimiento vibratorio será estudiado con detalle en los siguientes grados de la escuela.

De manera distinta por completo se mueve un cuerpo al que le ha sido comunicada una velocidad inicial, perpendicular a la fuerza elástica aplicada al cuerpo.

Semejante caso fue examinado en 4.6 (fig. 83). Allí aclaramos que, para semejante dirección mutua de la fuerza elástica y la velocidad, el cuerpo se mueve describiendo una circunferencia.

Por consiguiente, cuando la fuerza elástica tiene dirección perpendicular respecto de la velocidad inicial de movimiento del cuerpo, aquélla le comunica aceleración centrípeta y obliga a que el cuerpo se mueva sobre una circunferencia.

¿ ?

1. ¿Qué movimiento realiza un cuerpo si la única fuerza que sobre él actúa es la elástica?
2. ¿Qué podemos decir acerca de la aceleración de un cuerpo sobre el que actúa una fuerza variable (por ejemplo, la fuerza elástica)?
3. ¿Conduce siempre la aplicación de la fuerza elástica sobre un cuerpo al movimiento vibratorio de éste?

Tarea

Observar el comportamiento de un cuerpo suspendido de un muelle. ¿Pasará el primero de inmediato al estado en reposo?

6.2. Movimiento bajo el efecto de la fuerza de gravedad: el cuerpo se mueve en la dirección vertical

Ya a fines del siglo XVI, Galileo Galilei estableció que el movimiento de un cuerpo en caída libre es uniformemente variado. Además, determinó que todos los cuerpos caen con igual aceleración. Más tarde, se realizaron mediciones y fue aclarado que por su módulo dicha aceleración es igual a 9,8 m/s^2. Entonces, en los remotos tiempos de Galileo y prolongado tiempo después de él, estos hechos, establecidos por observaciones y mediciones, parecían bastante enigmáticos y no encontraban explicación alguna.

Sólo las leyes de movimiento de Newton y la ley de gravitación universal ponen en claro dichos hechos. Durante la caída, los cuerpos se mueven con aceleración porque sobre ellos actúa la fuerza de gravedad. La aceleración de los cuerpos que caen es constante a causa de que cerca de la superficie de la Tierra, dicha fuerza es constante. Por último, el que todos los cuerpos, independientemente de su masa, se mueven con igual aceleración, se explica por el hecho de que la fuerza de gravedad, como en general la fuerza de gravitación universal, es proporcional a la masa del cuerpo al que está aplicada. Sobre esto hablamos en 5.2.

Así pues, bajo la acción de la fuerza de gravedad, el cuerpo está en movimiento uniformemente variado, el vector de aceleración $\vec{g}$ está dirigido hacia abajo ("abajo" es la dirección del vector $\vec{g}$ en el lugar dado), mientras que su módulo es igual a 9,8 m/s^2.

Es necesario tener en cuenta que la aceleración de un cuerpo que cae no cambiará si le damos un empujón hacia abajo, comunicándole la velocidad inicial $\vec{v}_0$. Sólo que, entonces, el crecimiento de la velocidad comenzará, no desde su valor nulo, sino que desde v_0.

Tampoco variará la aceleración tanto en módulo, como en dirección en el caso de lanzar el cuerpo hacia arriba a cierta velocidad inicial. En todos estos casos, la trayectoria del cuerpo será una recta vertical, lo que quiere decir que el cuerpo está en movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Al resolver problemas dedicados a ese movimiento, en calidad de cuerpo de referencia es cómodo, aunque no obligatorio, tomar la Tierra, eligiendo el origen de registro de la coordenada en su superficie o bien en cualquier punto dispuesto más arriba o más abajo de ésta, además el eje de coordenadas conviene dirigirlo por la vertical hacia arriba o hacia abajo. La altura se suele designar con la letra h. Entonces (véase la fig. 116), la coordenada y del cuerpo será simplemente su altura sobre el origen de registro. En este caso, la proyección del desplazamiento del cuerpo $y - y_0$ corresponde a la variación de la altura. Por eso la proyección del desplazamiento es igual a $h - h_0$, donde h_0 es la altura inicial ($h_0 = y_0$).

Las fórmulas para calcular las coordenadas (alturas) y las velocidades, en nada difieren de las obtenidas en 2.2–2.4 para el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

La coordenada del cuerpo (altura) será:

$$\boxed{y = h = h_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}.} \tag{1}$$

La velocidad del cuerpo en cualquier momento de tiempo:

$$\boxed{v_y = v_{0y} + g_y t.} \tag{2}$$

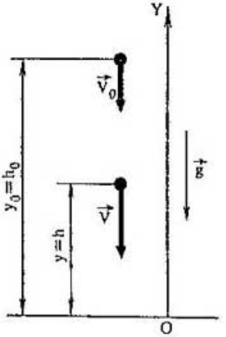


Fig. 116

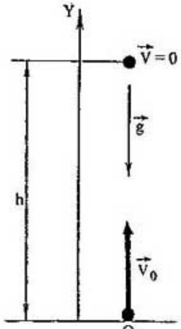


Fig. 117

La velocidad del cuerpo en cualquier punto del recorrido:

$$\boxed{v_y^2 = v_{0y}^2 + 2g_y(h - h_0).} \tag{3}$$

La proyección g_y es positiva si el eje Y está dirigido hacia abajo y negativa si dicho eje se dirige hacia arriba. Las proyecciones v_{0y} y v_y son positivas, si la velocidad tiene la misma dirección que el eje, y negativas, en el caso contrario.

Examinemos ejemplos sencillos.

PROBLEMA 1. Cierto cuerpo ha caído de una altura de 100 m. Hallar el tiempo que dura la caída del cuerpo a la tierra y su velocidad cuando el primero choca con la segunda.

Solución. Elegimos el origen de registro de la coordenada y (altura) en la superficie de la Tierra, mientras que el eje de coordenadas Y lo dirigimos hacia arriba (véase la fig. 116). Entonces $g_y = -g$, $v_y = -v$, $v_{0y} = 0$ (¡el cuerpo ha caído, no ha sido lanzado!). Por último, en el momento de su aterrizaje, $h = 0$.

El tiempo de la caída lo hallaremos empleando la fórmula (1), que se representará así:

$$0 = h_0 + 0 - \frac{gt^2}{2}.$$

De aquí

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 4{,}5 \text{ s}.$$

La velocidad de aterrizaje se calcula de acuerdo con la fórmula (2), que se escribirá así:

$$-v = 0 - gt, \text{ o bien } v = gt, \quad v = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4{,}5 \text{ s} \approx 44 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

PROBLEMA 2. ¿A qué altura se elevará un cuerpo, lanzado hacia arriba a una velocidad inicial $v_0 = 44$ m/s? Calcular el tiempo de la subida a dicha altura.

Solución. Lo mismo que al resolver el problema anterior, dirigimos el eje de coordenadas hacia arriba (fig. 117). En este caso, $v_{0y} = v_0$, $g_y = -g$. En el punto más alto de la subida $v = 0$. Entonces, la ecuación (2) tendrá la forma:

$$0 = v_0 - gt.$$

De aquí hallamos el tiempo de la subida:

$$t = \frac{v_0}{g}, \quad t = \frac{44\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 4{,}5 \text{ s}. \tag{5}$$

Ya que $h_0 = 0$, la altura de la subida se puede calcular haciendo uso de la fórmula (3). Tomando en consideración las condiciones del problema:

$$0 = v_0^2 - 2gh,$$

de donde

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad h = \frac{44\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 100 \text{ m}. \tag{6}$$

Comparando los problemas 1 y 2, vemos que el tiempo de la caída de un cuerpo desde cierta altura, es igual al tiempo de la subida a esa misma altura, si la velocidad inicial del cuerpo lanzado hacia arriba, es la misma que la velocidad final del cuerpo que cae. Este hecho no es asombroso, pues sobre el cuerpo que cae y sobre el que fue lanzado hacia arriba actúa una misma fuerza: la de gravedad $m\vec{g}$, que les comunica una aceleración idéntica $\vec{g}$.

¿ ?

1. ¿Qué se llama caída libre de un cuerpo?
2. ¿Con qué aceleración se mueve un cuerpo en caída libre; un cuerpo lanzado hacia abajo?
3. ¿Con qué aceleración se mueve un cuerpo lanzado hacia arriba? ¿A qué es igual y cómo está dirigida esta aceleración?
4. ¿En qué difiere la aceleración que la fuerza de gravedad comunica a los cuerpos de la aceleración que les comunican otras fuerzas?
5. ¿Por qué la aceleración comunicada a un cuerpo por la fuerza de gravedad es constante y no depende de su masa?
6. ¿Si un cuerpo cayera a la Tierra de una altura de varias centenas o miles de kilómetros, sería este movimiento uniformemente variado? En este caso ¿dependería o no la aceleración de la masa del cuerpo?

Ejercicios 19

Al resolver los problemas es necesario considerar que se desprecia la resistencia del aire.

1. Hasta el fondo de un barranco la caída de un cuerpo duró 4 s. ¿Cuál será la profundidad del barranco?
2. ¿Cuánto tiempo tardaría en caer un cuerpo desde el punto superior de la torre de televisión de Ostánkino (540 m)? ¿Cuál sería su velocidad en el momento de caer en la tierra?
3. ¿En el transcurso de qué tiempo, un cuerpo que comenzó la caída desde el estado de reposo recorrerá 4,9 m? ¿Cuál será su velocidad al final de dicho recorrido?
4. Estando en el borde de una peña de 180 m de altura sobre la tierra, un niño dejó caer una piedra y después de pasar un segundo, lanzó hacia abajo la segunda piedra. ¿Qué velocidad inicial comunicó a la segunda piedra si las dos llegaron a la tierra al mismo tiempo?
5. Un cuerpo cae libremente de una altura de 20 m sobre la tierra. ¿Qué velocidad tendrá el cuerpo al chocar con la tierra y a qué altura su velocidad será dos veces menor?
6. En la lámina en colores *I* vienen representadas las posiciones sucesivas de una bolita en caída libre registradas cada 0,1 s. Haciendo uso de la figura determinar la aceleración de la caída libre, si la velocidad inicial de la bolita era igual a cero. La escala se ha elegido de tal forma que el tamaño de la red es $0{,}18 \times 0{,}18$ m.
7. Una flecha fue lanzada con un arco en dirección vertical hacia arriba a una velocidad de 30 m/s. ¿A qué altura subirá?
8. Un cuerpo lanzado en dirección vertical hacia arriba desde la tierra, cayó después de 8 s. Hallar la altura a que subió y cuál fue su velocidad inicial.
9. De una pistola de resorte instalada a una altura de 2 m sobre la tierra, fue disparada verticalmente hacia arriba una bolita a una velocidad de 5 m/s. Determinar la altura máxima a que sube y qué velocidad tendrá la bola en el momento de la caída a la tierra. ¿Cuánto tiempo se encontró en vuelo la bola? ¿Cuál fue su desplazamiento durante los primeros 0,2 s de vuelo?
10. Un cuerpo ha sido lanzado verticalmente hacia arriba a una velocidad de 40 m/s. ¿A qué altura se encontrará después de 3 y 5 s y a qué velocidades se moverá en esos momentos? Tomar $g = 10$ m/s^2.
11. Dos cuerpos han sido lanzados en dirección vertical hacia arriba a distintas velocidades iniciales. Uno de ellos alcanzó una altura cuatro veces mayor que el otro. ¿Cuántas veces mayor será la velocidad inicial del primero que la del segundo cuerpo?
12. Un cuerpo lanzado hacia arriba pasa delante de una ventana a una velocidad de 12 m/s. ¿A qué velocidad pasará delante de esa misma ventana hacia abajo?

6.3. Movimiento bajo el efecto de la fuerza de gravedad: la velocidad inicial del cuerpo está dirigida formando cierto ángulo hacia el horizonte

Con bastante frecuencia se tropieza con el movimiento de cuerpos que han recibido velocidad inicial no paralela a la fuerza de gravedad, sino que formando cierto ángulo respecto de ella (o con relación al horizonte). Acerca de semejante cuerpo, suele decirse que ha sido lanzado en ángulo al horizonte. Por ejemplo, cuando un deportista lanza el

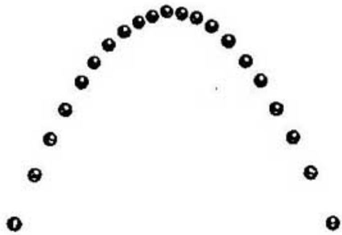


Fig. 118

peso, el disco o la jabalina, comunica a estos objetos, precisamente, semejante velocidad inicial. Al disparar una pieza de artillería, a su cañón se le comunica cierto ángulo de elevación, de forma que al lanzar el proyectil, éste también recibe una velocidad inicial dirigida en cierto ángulo al horizonte.

Consideraremos que la resistencia del aire puede ser despreciada. En este caso, ¿cómo se mueve el cuerpo?

En la fig. 118 y en la pág. 233 se muestra la fotografía estroboscópica de una bolita lanzada formando un ángulo de 60° hacia el horizonte. Uniendo las posiciones sucesivas de la bola con una línea suave, obtendremos la trayectoria del movimiento de la bolita. Esta trayectoria es la curva, conocida del curso de álgebra, llamada PARÁBOLA.

Ya Galileo sabía que un cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte se mueve por una parábola. Pero, de nuevo, sólo las leyes de movimiento de Newton y la ley de la gravitación universal proporcionaron la explicación de este hecho.

Sea que desde cierto punto, se ha lanzado un cuerpo a una velocidad inicial $\vec{v}_0$ dirigida formando el ángulo α hacia el horizonte. Tomemos como origen de registro, el punto desde el que fue lanzado el cuerpo, dirijamos el eje X por la horizontal y el eje Y, por la vertical (fig. 119). Como origen de la cuenta del tiempo se toma el instante en que el cuerpo fue lanzado. De la figura se infiere que las proyecciones de la velocidad inicial $\vec{v}_0$ sobre los ejes Y y X son, correspondientemente, iguales a v_0 sen α y $v_0 \cos \alpha$, donde v_0 es el módulo del

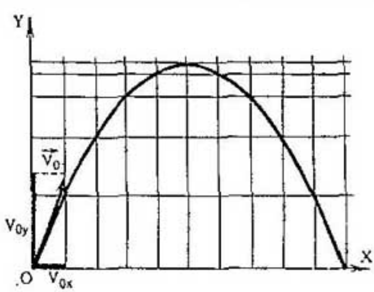


Fig. 119

vector de la velocidad inicial $\vec{v}_0$:

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha; \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha.$$

Como sobre el cuerpo sólo actúa la fuerza de gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo, durante el movimiento del cuerpo únicamente variará la proyección del vector de velocidad $\vec{v}$ sobre el eje Y, en tanto que la proyección de la velocidad sobre el eje X no cambiará.

Por esta causa, la coordenada x del cuerpo con el correr del tiempo varía del mismo modo que en caso del movimiento rectilíneo uniforme:

$$x = v_{0x}t. \tag{1}$$

En lo que respecta a la coordenada y, ésta cambia supeditándose al movimiento rectilíneo uniformemente variado:

$$y = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}. \tag{2}$$

Con el fin de trazar la trayectoria de movimiento del cuerpo, es menester sustituir en las ecuaciones (1) y (2) los valores del tiempo t en aumento sucesivo y calcular las coordenadas x e y para cada momento de tiempo t. Ateniéndose a estas coordenadas se pueden marcar los puntos que representarán las posiciones sucesivas del cuerpo. La suave curva, que se obtiene al unir esos puntos, es la trayectoria que nos interesa. Viene mostrada en la fig. 119. Teniendo dicha curva, podemos determinar el valor de una de las coordenadas conociendo uno u otro valor de la otra coordenada.

¿POR QUÉ ES UNA PARÁBOLA? El valor de una coordenada, a partir del valor conocido de la otra, puede ser hallado (además, con mayor precisión), si obtenemos la fórmula que liga dichas coordenadas.

En efecto, de la fórmula (1) se desprende que el momento de tiempo t, cuando la abscisa es x, queda definido por la expresión $t = x/v_{0x}$. Hallemos la coordenada y en ese mismo instante. Para ello, en la fórmula (2) ponemos en lugar de t su valor $t = x/v_{0x}$. Obtenemos:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x + \frac{g_y}{2v_{0x}^2}x^2. \tag{3}$$

Designemos los coeficientes de x^2 y de x en esta igualdad por a y b:

$$a = \frac{g_y}{2v_{0x}^2}; \quad b = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}.$$

Entonces, la igualdad (3) tomará la forma:

$$y = ax^2 + bx. \tag{4}$$

Del curso de álgebra sabemos que la gráfica de la función, escrita en forma de la ecuación (4), es una parábola. La ecuación, que liga entre sí las coordenadas del cuerpo en movimiento, recibe el nombre de ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA (en

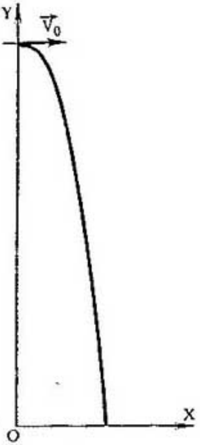


Fig. 120

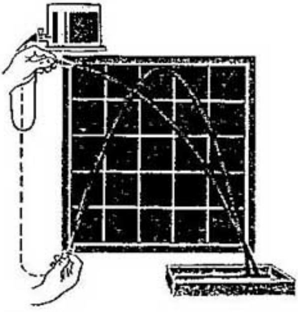


Fig. 121

esta ecuación el tiempo no figura). Hemos mostrado cómo se mueve describiendo una parábola el cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte.

MOVIMIENTO DE UN CUERPO LANZADO HORIZONTALMENTE. El cuerpo puede ser también lanzado, de manera que su velocidad inicial $\vec{v}_0$ esté dirigida horizontalmente ($\alpha = 0$). Por ejemplo, así está dirigida la velocidad inicial de un cuerpo que se ha separado de un avión en vuelo horizontal. Es fácil aclarar por qué trayectoria se moverá tal cuerpo. Con este fin recurramos a la fig. 119, la que ofrece la trayectoria de movimiento de un cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte. En el punto superior de la parábola, la velocidad del cuerpo está dirigida de modo horizontal y sabemos que después de ese punto, el cuerpo se mueve por la rama derecha de la parábola. Es evidente, que todo cuerpo lanzado con cierta velocidad inicial $\vec{v}_0$ dirigida horizontalmente, se moverá por la rama de una parábola (fig. 120).

La trayectoria de movimiento de los cuerpos lanzados en sentido horizontal o bien formando cierto ángulo hacia el horizonte, puede ser observada con evidencia en un sencillo experimento. Un recipiente lleno de agua se coloca a cierta altura sobre la mesa y se une con un tubo de goma, equipado de una boquilla con un grifo (fig. 121). Los chorros que salen muestran en directo la trayectoria de las partículas de agua. Variando el ángulo, bajo el que sale el chorro de agua, podemos cerciorarnos de que la máxima distancia se alcanza con un ángulo de 45°.

Hemos examinado varios ejemplos de movimiento de los cuerpos bajo el efecto de la fuerza de gravedad. De ellos se desprende que, en todos esos casos, el cuerpo se mueve con la aceleración $\vec{g}$, que le comunica la fuerza de gravedad. Dicha aceleración no depende en absoluto de si se mueve el cuerpo además en dirección horizontal o no. Incluso podemos decir que en todos estos casos el cuerpo está sometido a la caída libre.

Por ejemplo, a causa de esto, la bala de un fusil disparada por un tirador en dirección horizontal, caerá a tierra al mismo tiempo que una bala que casualmente ha dejado caer el tirador en el momento del disparo. Pero esta última, caerá junto a los pies del tirador, mientras que la que se disparó del fusil, a varias centenas de metros de él.

En la lámina en colores *I, b* viene representada la fotografía estroboscópica de dos bolitas, una de las cuales cae verticalmente, mientras que a la segunda, en el momento en que comenzó a caer la primera, le fue comunicada cierta velocidad en dirección horizontal. En la foto vemos que en los mismos momentos de tiempo (instantes en que se enciende la luz) ambas bolitas se encuentran a una misma altura y, claro está, llegan a tierra simultáneamente.

Al resolver problemas, que se refieren a semejante movimiento, hay que considerar por separado cómo varían las coordenadas x, y. La coordenada x cambia de acuerdo con la fórmula (1), mientras que la coordenada y, con la (2).

PROBLEMA 1. Un proyectil fue disparado de un cañón en un ángulo α hacia el horizonte, a velocidad inicial $\vec{v}_0$. Hallar: a) el tiempo de vuelo del proyectil; b) la altura máxima de su elevación; c) la distancia que cubrirá el proyectil.

Solución. El movimiento de un cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte, se describe mediante las ecuaciones (1) y (2).

Como $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha$, $g_y = -g$, entonces

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

a) Al final del vuelo del proyectil $y = 0$, por lo tanto, el tiempo de duración del vuelo será hallado de la ecuación para la coordenada y:

$$0 = v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Resolviéndola, obtenemos:

$$t_1 = 0; \quad t_2 = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

El valor $t_1 = 0$ corresponde al comienzo del vuelo (en este instante la coordenada y también es igual a cero), en tanto que t_2 es el tiempo de duración del vuelo:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

Gracias a la simetría de la parábola, el tiempo de elevación hasta su vértice, es dos veces menor que el tiempo de vuelo, es decir,

$$t_{\text{elevación}} = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

b) La altura máxima de elevación $h_{\text{máx}}$ es el valor de la coordenada y que se obtiene, si en la expresión para dicha coordenada se pone en lugar de t el valor hallado del tiempo de elevación:

$$h_{\text{máx}} = v_0 \operatorname{sen} \alpha \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}\right)^2$$

o bien, después de simplificar:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}.$$

c) La distancia de vuelo l es igual al valor de la coordenada x que obtendremos, si en la fórmula para dicha coordenada ponemos en lugar de t el tiempo de duración del vuelo.

Por lo tanto,

$$l = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Es fácil establecer con qué ángulo α la distancia de vuelo es la máxima. Como sabemos de la trigonometría, $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$. Por lo tanto, la expresión para la distancia de vuelo puede ser escrita así:

$$l = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

De aquí se infiere que la distancia de vuelo será la mayor si $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$. Esto quiere decir, que $2\alpha = 90°$ o bien $\alpha = 45°$.

PROBLEMA 2. De un avión que vuela en dirección horizontal con una velocidad $v_0 = 720$ km/h, a una altura $h = 3920$ m sobre la tierra, fue lanzada una carga. ¿A qué distancia caerá ésta a tierra respecto del lugar sobre el que la lanzaron?

Solución. En el instante en que se separa del avión, la carga lanzada tiene una velocidad $\vec{v}_0$, dirigida horizontalmente e igual en módulo a la del avión. Tomemos este instante como origen de cuenta del tiempo, mientras que como origen de coordenadas, elijamos el punto desde el que fue lanzada la carga. Dirijamos el eje X de modo horizontal, mientras que el eje Y, verticalmente hacia arriba (fig. 122). El movimiento de la carga se describe por las ecuaciones que ya conocemos:

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

En nuestro problema, $\alpha = 0$, por lo tanto, $\operatorname{sen} \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$. Entonces, las ecuaciones que describen el movimiento de la carga lanzada desde el avión

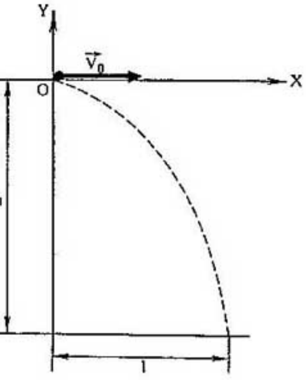


Fig. 122

toman la forma:

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{gt^2}{2}.$$

La distancia de vuelo l es el valor de la coordenada x que ésta tendrá si en lugar del tiempo t ponemos el tiempo de la caída de la carga. Dicho tiempo puede ser hallado de la ecuación para la coordenada y. En el momento del aterrizaje $-y = h$, por lo tanto

$$-h = -\frac{gt^2}{2}.$$

De aquí hallamos el tiempo que dura la caida de la carga:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Por consiguiente,

$$l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad l = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 3920\ \text{m}}{9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 5600\ \text{m}.$$

Cuando estudiamos el movimiento de un cuerpo lanzado en sentido horizontal o con cierto ángulo respecto del horizonte, hemos considerado que el cuerpo sólo se encuentra bajo el efecto de la fuerza de gravedad. En realidad, esto no es así. Junto con esta última, sobre el cuerpo siempre actúa la fuerza de resistencia (rozamiento) que provoca el aire, lo que conduce a la reducción de la velocidad.

Por esta causa, la distancia de vuelo de un cuerpo lanzado en dirección horizontal o en cierto ángulo hacia el horizonte, siempre es menor que la que se desprende de las fórmulas, obtenidas en este parágrafo; la altura de subida de un cuerpo, lanzado por la vertical, siempre es menor que la calculada aplicando la fórmula aducida en 6.2, etc.

La acción de la fuerza de resistencia también conduce a que la trayectoria de movimiento del cuerpo, lanzado en sentido horizontal o bien con cierto ángulo hacia el horizonte, no sea una parábola, sino que una curva más complicada.

¿ ?

1. ¿Qué hay de común en el movimiento de los cuerpos lanzados en sentido vertical, horizontal y en cierto ángulo hacia el horizonte?
2. ¿Por qué trayectoria se mueve un cuerpo lanzado con cierto ángulo respecto del horizonte?
3. ¿Qué fuerza actúa sobre un cuerpo durante su movimiento, si ha sido lanzado formando cierto ángulo respecto del horizonte?
4. ¿Podemos considerar uniformemente variado el movimiento de un cuerpo lanzado en cierto ángulo hacia el horizonte?
5. ¿Con qué aceleración se mueve un cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte? ¿Cómo está dirigida dicha aceleración? *Indicación.* Al responder a las preguntas hay que considerar que el rozamiento puede ser despreciado.

Ejercicios 20

1. Un balón ha sido lanzado en un ángulo de 30° hacia el horizonte a una velocidad inicial de 10 m/s. Determinar la altura de elevación, así como el tiempo de duración y la distancia del vuelo.
2. Una bala es disparada en sentido horizontal y vuela a una velocidad media de 800 m/s. ¿Cuánto descenderá la bala en dirección vertical durante el vuelo si la distancia hasta el objetivo es de 600 m?

Tareas

1. Mostrar que las fórmulas que describen el movimiento de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba (fórmulas 5, 6 en 6.2), se obtienen como un caso particular de las fórmulas para el movimiento de un cuerpo lanzado formando un ángulo con el horizonte, si consideramos que este ángulo es igual a 90° ($\alpha = 90°$).
2. Construir la trayectoria de movimiento de un cuerpo lanzado en un ángulo de 45° hacia el horizonte. La escala de la velocidad inicial y de las coordenadas elíjalas por su cuenta.

6.4. Peso de un cuerpo que se mueve con aceleración

¿CUÁNDO EL PESO ES IGUAL A LA FUERZA DE GRAVEDAD? Recordemos que el peso de un cuerpo es igual a la fuerza con la que él actúa sobre el apoyo o la suspensión. Si estos últimos están en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme con relación a la Tierra, el peso del cuerpo será igual a la fuerza de gravedad $m\vec{g}$.

¿CUÁNDO EL PESO DE UN CUERPO DIFIERE DE LA FUERZA DE GRAVEDAD? Pero el peso de un cuerpo puede diferenciarse notablemente del valor de la fuerza de gravedad, si el apoyo o la suspensión se mueven con aceleración hacia arriba o abajo. ¿Por qué?

Recordemos que el peso es la fuerza medida con una balanza, digamos, de resorte. Veamos qué indicará ésta, si junto con el cuerpo suspendido de ella se encuentra en movimiento acelerado hacia arriba o abajo.

Colguemos de la balanza de resorte cierta carga y permitamos que ambas se muevan con cierta aceleración $\vec{a}$. Con este fin, hay que coger con la mano la

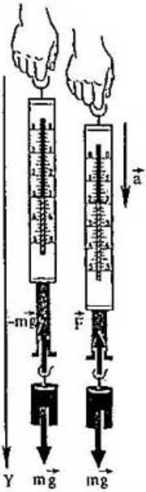


Fig. 123

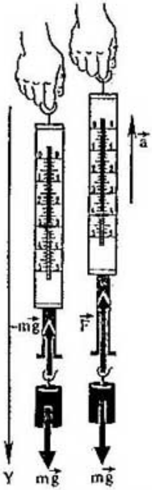


Fig. 124

balanza con la carga y bruscamente hacerlas descender (fig. 123), comunicándoles una aceleración dirigida hacia abajo. Veremos que, al bajar la balanza con la carga, la aguja de la primera se desplazará hacia arriba. Esto quiere decir que durante la bajada el peso de la carga ha disminuido, en comparación con el que mostraba la balanza en reposo. Y viceversa, si subimos bruscamente la balanza, su aguja se desplazará hacia abajo, mostrando así que el peso ha aumentado (fig. 124). ¿Cómo explicar la disminución o el aumento del peso durante el movimiento acelerado del dinamómetro (la balanza) con la carga?

Hallamos la respuesta en la segunda ley de Newton. Analicemos a qué fuerzas está sometida la *carga*. Sobre ella actúan la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ dirigida hacia abajo, y la fuerza elástica $\vec{F}$ del resorte de la balanza, dirigida hacia arriba. Bajo el efecto de estas dos fuerzas, el cuerpo se mueve con aceleración $\vec{a}$, que puede estar dirigida tanto hacia abajo como hacia arriba, en dependencia de cómo movamos la balanza: la subimos o la bajamos.

Según la segunda ley de Newton

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}.$$

De donde

$$\vec{F} = m\vec{a} - m\vec{g}. \qquad (1)$$

Con una fuerza igual por su módulo, pero de dirección opuesta a $\vec{F}$, la carga actúa sobre el *muelle*. Siendo esta fuerza la correspondiente al peso $\vec{P}$.

$$\vec{P} = -\vec{F}.$$

Por consiguiente,

$$\vec{P} = -(m\vec{a} - m\vec{g}) = m(\vec{g} - \vec{a}). \qquad (2)$$

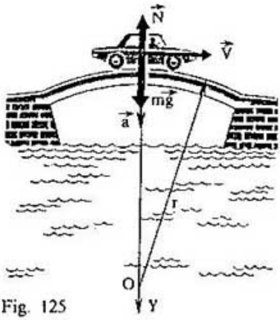


Fig. 125

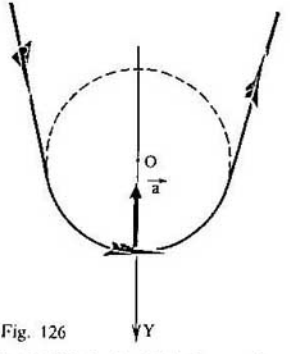


Fig. 126

Los vectores $\vec{P}$, $\vec{g}$ y $\vec{a}$ son paralelos a la vertical. Dirigiendo el eje de coordenadas Y por la vertical hacia abajo (véanse las figs. 123 y 124), podemos escribir la expresión (2) en forma algebraica para las proyecciones de estos vectores sobre el eje vertical:

$$P_y = m(g_y - a_y). \tag{3}$$

Para la dirección elegida del eje Y, en el caso ilustrado en la fig. 123, las proyecciones P_y, g_y y a_y son positivas e iguales a los módulos de los propios vectores. Por esta razón, la expresión (3) se puede escribir en la forma

$$P = m(g - a). \tag{4}$$

De aquí vemos que si $a < g$, $P < mg$.

El peso de un cuerpo, cuya aceleración está dirigida en el mismo sentido que la aceleración de la caída libre, es menor que el peso de un cuerpo en reposo.

Si la aceleración $\vec{a}$ de la balanza está dirigida hacia arriba (fig. 124), las proyecciones de P_y, g_y son igualmente positivas, mientras que la de a_y, negativa. Por lo tanto, la fórmula (3) toma el aspecto:

$$P = m(g + a). \tag{5}$$

Por lo tanto, $P > mg$.

Si la aceleración de un cuerpo tiene dirección en sentido opuesto a la de la aceleración de la caída libre, su peso es mayor que el de un cuerpo en reposo.

El aumento del peso de un cuerpo provocado por su movimiento acelerado, recibe el nombre de *sobrecarga*.

El peso aumenta o disminuye no sólo cuando el cuerpo en movimiento con aceleración está suspendido de una balanza de resorte. Lo mismo sucede con cualquier suspensión o sobre todo apoyo.

A continuación, aducimos varios ejemplos de variación del peso de un cuerpo, durante su movimiento acelerado.

1. Un automóvil que avanza por un puente convexo (fig. 125) es más ligero

que ese mismo automóvil parado en dicho puente.

En efecto, el movimiento por un puente convexo se puede considerar como el movimiento sobre una parte de la circunferencia. Por eso, el vehículo se mueve con aceleración centrípeta, cuyo módulo es igual a:

$$a = \frac{v^2}{r},$$

donde v es la velocidad lineal del automóvil; r, el radio de curvatura. En el instante en que el auto se halla en el punto superior del puente dicha aceleración está dirigida hacia abajo El vehículo adquiere aceleración bajo la acción de la resultante de la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ y la fuerza $\vec{N}$ de reacción del puente.

La ecuación, que expresa la segunda ley de Newton en forma vectorial, se escribe así:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Dirijamos el eje de coordenadas Y en sentido vertical hacia abajo y escribamos de nuevo la ecuación anterior para las proyecciones de los vectores sobre dicho eje:

$$mg_y + N_y = ma_y.$$

Es evidente que

$$g_y = g, \quad N_y = -N \text{ y } a_y = a = \frac{v^2}{r}.$$

Entonces

$$mg - N = m\frac{v^2}{r},$$

de donde

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right).$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, el peso del automóvil $\vec{P}$ (o sea, la fuerza con la que éste presiona sobre el puente) está dirigido en sentido opuesto a la fuerza de reacción del puente $\vec{N}$, pero por su módulo estas fuerzas son iguales, por consiguiente,

$$P = N = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right), \quad P < mg.$$

Del mismo modo se reduce el peso de los pasajeros que viajan en un automóvil por un puente convexo. La disminución del peso será tanto mayor, cuanto mayor sea la velocidad del auto.

A causa de la rotación de la Tierra, todo cuerpo que en el ecuador está en reposo, se encontrará en un estado análogo al de los pasajeros del automóvil que se mueve por un puente convexo. Su peso se calcula por la fórmula

$$P = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) = m(g - \omega^2 R),$$

donde R y ω son, respectivamente, el radio de la Tierra y su velocidad angular de rotación. En el polo, el peso de esos mismos cuerpos sería igual a mg. Como $\omega^2 R \approx 3{,}4 \cdot 10^{-4}$ m/s^2, al realizar cálculos aproximados, la magnitud $\omega^2 R$ se desprecia y se considera que en el ecuador el peso del cuerpo también es igual a mg.

2. Un piloto que saca el avión del picado (fig. 126), sufre sobrecarga en la parte inferior de la trayectoria. En realidad, en la parte indicada de ésta, el avión se mueve describiendo una circunferencia con aceleración centrípeta dirigida al centro verticalmente hacia arriba. El módulo de la aceleración es igual a:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Pero sobre el eje vertical, dirigido hacia abajo, su proyección es negativa:

$$a_y = -a = -\frac{v^2}{r}.$$

Así pues, el peso del piloto, es decir, la fuerza con la que él actúa sobre el apoyo (el asiento), de acuerdo con la fórmula (3), será determinado por la expresión

$$P_y = m(g_y - a_y) = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right), \text{ o sea, } P > mg.$$

De forma, que el peso del piloto es mayor que el "normal", igual a la fuerza de gravedad mg, en la magnitud mv^2/r. Si al salir del picado la aceleración centrípeta v^2/r por su módulo supera la aceleración g de la caída libre n veces ($v^2/r = ng$), el peso del piloto

$$P = m(g + ng) = mg(n + 1),$$

o sea, será $n + 1$ veces mayor que el peso "normal" del piloto.

Durante la sobrecarga, aumentan también su peso los órganos internos del piloto, crece la fuerza con la que ellos actúan entre sí y sobre el esqueleto. Esto provoca sensaciones dolorosas. Además, sobrecargas excesivamente grandes pueden ser peligrosas para la salud. Los pilotos bien entrenados aguantan sobrecargas hasta de 10 mg (por regla, la sobrecarga se expresa no mediante la magnitud mg, sino mediante la g y se dice que la sobrecarga es, por ejemplo, 10 g).

¿ ?

1. ¿Cómo varía el peso de un cuerpo cuando su movimiento es acelerado?
2. ¿Cambia el peso de un cuerpo, si éste se mueve con aceleración en sentido horizontal?
3. ¿Cómo varía el peso de un cosmonauta durante el lanzamiento del cohete que pone en órbita la nave cósmica?

4. ¿Cómo varía el peso de un cosmonauta durante el frenado de una nave que va a aterrizar?
5. ¿Qué podemos decir sobre el peso de un piloto que realiza la figura llamada rizo, cuando se encuentra en los puntos superior e inferior de la figura?

Ejercicios 21

1. Una plancha de hormigón de 500 kg de masa se desplaza con uniformidad por medio de una grúa: a) verticalmente hacia arriba; b) horizontalmente; c) verticalmente hacia abajo. ¿A qué serán iguales la fuerza de gravedad que sobre ella actúa y su peso en cada uno de estos casos?
2. En el fondo de una jaula de mina se encuentra una carga de 100 kg de masa. ¿Cuál será su peso si la jaula: a) sube verticalmente con aceleración de 0,3 m/s^2; b) está en movimiento uniforme; c) baja con una aceleración de 0,4 m/s^2; d) cae libremente?
3. ¿En cuánto disminuirá el peso de un automóvil en el punto superior de un puente convexo? El radio de curvatura del puente es 100 m. La masa del automóvil constituye 2000 kg, su velocidad, 60 km/h.
4. Determinar el peso de un cuerpo de 1 kg de masa en el polo y en el ecuador. Considerar que el radio de la Tierra es igual a 6400 km.

6.5. Ingravidez

Sólo nos queda considerar el caso en que la carga junto con la balanza cae libremente, es decir, cuando soltamos la balanza de la mano (fig. 127). La experiencia muestra que, durante la caída libre, la aguja de la balanza se establece en el cero: el peso resulta ser nulo. Esto está claro. En efecto, cuando la carga cae bajo la acción de la atracción hacia la Tierra, el resorte de la balanza "correspondientemente sigue a la primera" (véase la fig. 127). Por eso el resorte no se deforma. Pero si esto es así, el cuerpo suspendido del resorte no estará sometido a la acción de ninguna fuerza por parte del mismo. Por esta misma causa, la carga tampoco se deformará y no actuará sobre el muelle. La carga resulta ingrávida.

El hecho de que, durante la caída libre, el peso del cuerpo es igual a cero, se desprende en directo de la fórmula (4) del parágrafo anterior:

$$P = m(g - a).$$

Durante la caída libre de un cuerpo $a = g$. Así que

$$P = m(g - g) = 0.$$

Bajo esta condición desaparece la acción recíproca entre el apoyo y el cuerpo.

La causa de la ingravidez consiste en que la fuerza de gravitación universal comunica iguales aceleraciones al cuerpo y a su apoyo. Por esta causa, todo cuerpo que se mueve sólo bajo la acción de las fuerzas de la gravitación universal se encuentra en estado de ingravidez.

Precisamente en semejantes condiciones se halla un cuerpo en caída libre.

Este asombroso hecho se ilustra con ayuda del siguiente e interesante

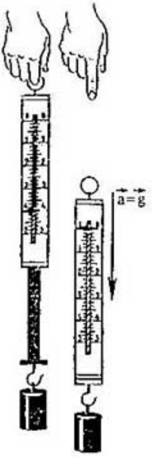


Fig. 127

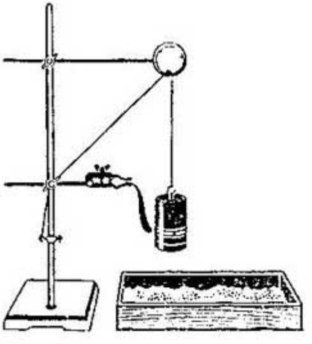


Fig. 128

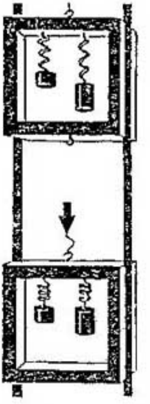


Fig. 129

experimento (fig. 128).

Entre dos pesas macizas se coloca una tira de papel de periódico o secante, cuyo extremo libre se fija con seguridad en la orejeta del soporte. Las pesas se dejan descender lentamente, éstas tensan y rompen la tira de papel. De aquí se puede concluir que la tira de papel estaba suficientemente apretada entre las pesas. La tira de papel rota se cambia por otra igual pero nueva y se deja que las cargas caigan libremente. La tira de papel se libera y queda colgada del soporte. El experimento muestra que, durante la caída libre, desaparece la presión de las pesas sobre el apoyo, es decir, durante su caída, las pesas se encuentran en estado de ingravidez.

¿ ?

1. ¿En qué casos el cuerpo se encuentra en estado de ingravidez y cuál es la causa general que provoca la ingravidez?
2. ¿Se hallará en estado de ingravidez un cuerpo lanzado en sentido vertical hacia arriba? Despreciar el rozamiento del aire.
3. ¿Se encontrará en estado de ingravidez durante su movimiento un cuerpo lanzado horizontalmente? ¿Y un cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte? Despreciar el rozamiento del aire.
4. En un marco, que puede desplazarse por dos barras de guía (fig. 129), están suspendidas de dos muelles iguales cargas distintas. Si cortamos el hilo, mediante el cual estaba fijado el marco, éste caerá libremente (el rozamiento es pequeño y puede despreciarse) y con ello desaparecerá la deformación de los muelles. Explicar por qué desaparece la deformación de los muelles en caso de la caída libre.

6.6. Satélites artificiales de la Tierra. Primera velocidad cósmica.

En 6.3 estudiamos cómo se mueve un cuerpo al que, a una altura h sobre la Tierra, le fue comunicada una velocidad $\vec{v}$ en dirección horizontal, es decir, en paralelo a la superficie del planeta. El cuerpo describe una trayectoria singular – una parábola, desplazándose por la cual, cae a la Tierra.

Cuando examinamos semejante movimiento del cuerpo, considerábamos que la superficie de la Tierra era plana. Siendo las velocidades $\vec{v}$ relativamente pequeñas, para las cuales el desplazamiento del cuerpo en dirección horizontal es pequeño, semejante simplificación es justa (fig. 130).

LA TIERRA SE ESCAPA DEL CUERPO. En la realidad la Tierra es una esfera. Por esta razón, al mismo tiempo que el cuerpo se desplaza por su trayectoria, la Tierra se aleja un poco de él (fig. 131). Se puede elegir un valor tal de la velocidad $\vec{v}$ del cuerpo, con el cual la superficie de la Tierra, a causa de su curvatura, se alejará del cuerpo a la misma magnitud que el cuerpo se acerca a ella debido a su atracción. Entonces, el cuerpo se moverá a una distancia h constante de la superficie del planeta, es decir, por una circunferencia de radio $R + h$, donde R es el radio del globo terrestre (fig. 132). ¿Cuál es esa velocidad?

SATÉLITE ARTIFICIAL DE LA TIERRA. Ya que el cuerpo se mueve uniformemente sobre una circunferencia, su aceleración será igual en módulo a:

$$a = \frac{v^2}{R + h}.$$

La que comunica esta aceleración al cuerpo es la fuerza de gravedad de la Tierra, cuyo módulo es igual a:

$$F = G\frac{Mm}{(R + h)^2}$$

(aquí M es la masa de la Tierra, m la masa del cuerpo).

Según la segunda ley de Newton

$$a = \frac{F}{m} = G\frac{M}{(R + h)^2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{v^2}{R + h} = G\frac{M}{(R + h)^2},$$

de donde

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R + h}}. \qquad (1)$$

Así pues, si en dirección horizontal comunicamos al cuerpo la velocidad determinada por medio de la fórmula (1), aquél se moverá alrededor de

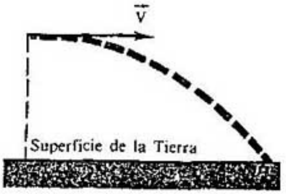


Fig. 130

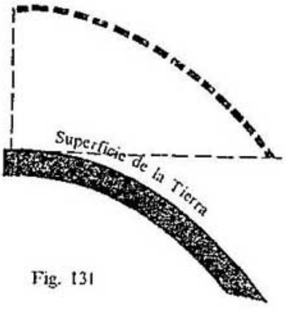


Fig. 131

la Tierra, es decir, se convertirá en un satélite artificial de nuestro planeta.

PRIMERA VELOCIDAD CÓSMICA. Un cuerpo de cualquier masa puede ser satélite de la Tierra, claro está si es que se le transmite una velocidad suficiente. Calculemos ésta para un satélite que se lanza en las vecindades de la superficie terrestre ($h = 0$):

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}}.$$

Recordemos que $GM/R^2 = g$, así que

$$G\frac{M}{R} = gR.$$

De aquí

$$\boxed{v = \sqrt{gR}.}$$

Poniendo en esta fórmula el valor de las magnitudes $g = 9{,}8$ m/s^2 y

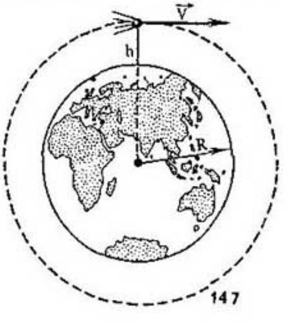


Fig. 132

10*

$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, obtenemos:

$$v = \sqrt{9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{m}} \approx 8 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Semejante velocidad en dirección horizontal hay que comunicar al cuerpo junto a la superficie terrestre para que él no caiga y se convierta en satélite de la Tierra, describiendo una órbita circular. Esta velocidad recibe el nombre de PRIMERA CÓSMICA (véase la pág. 235).

¡Ocho kilómetros por segundo son casi 29 mil kilómetros por hora! Comunicar a un cuerpo semejante velocidad naturalmente no es fácil. Sólo en 1957, los científicos soviéticos, por primera vez en la historia de la humanidad, consiguieron transmitir con un potente cohete la primera velocidad cósmica a un cuerpo de más de 84 kg de masa. Dicho cuerpo fue el primer satélite artificial (Sputnik) de la Tierra.

El movimiento de los satélites alrededor del globo terrestre tiene lugar bajo el efecto de una sola fuerza, la de gravitación universal que transmite al satélite y a todos los objetos que en él se encuentran, iguales aceleraciones. En semejante caso, el concepto de peso pierde su sentido, como ya dijimos en 6.5. Pues en este caso cualquier cuerpo y su "apoyo" no se deforman mutuamente y no pueden "presionar" uno sobre otro. Esto significa que todos los cuerpos en el satélite, incluidos los pasajeros, se hallan en estado de ingravidez.

¿ ?

1. ¿Cómo deberá estar dirigida la velocidad del cuerpo, en el instante de colocarlo en una órbita circular, para que se convierta en un satélite artificial de la Tierra?
2. ¿Cómo estará dirigida la aceleración de un satélite artificial de la Tierra?
3. ¿Podemos considerar el movimiento de un satélite artificial de la Tierra uniformemente variado?
4. El cosmonauta soviético A. Leónov fue el primero que salió de una nave cósmica al espacio extravehicular. ¿Estuvo él en ese caso en estado de ingravidez?

Ejercicios 22

1. Calcular el periodo de rotación de un satélite de la Tierra a una altura de 300 km.
2. Calcular la primera velocidad cósmica para una altura sobre la Tierra igual al radio de ésta.
3. ¿A qué altura la primera velocidad cósmica es igual a 6 km/s?
4. ¿A qué altura debe ser lanzado un satélite artificial de la Tierra para que su período de rotación sea igual a 24 h?

6.7. Movimiento de un cuerpo bajo el efecto de la fuerza de rozamiento

La fuerza de rozamiento de deslizamiento difiere de todas las demás fuerzas, en que está dirigida en sentido contrario a la dirección de la velocidad relativa de movimiento de los cuerpos en contacto.

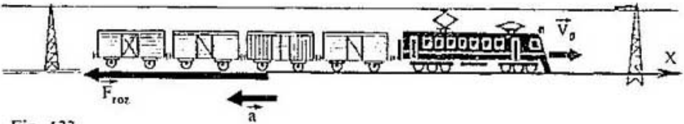


Fig. 133

De aquí sigue que la aceleración, comunicada por la fuerza de rozamiento a un cuerpo que se mueve sobre una superficie inmóvil, está dirigida contra la velocidad relativa. Esto quiere decir, que *el efecto de la fuerza de rozamiento conduce a la disminución del valor absoluto de la velocidad del cuerpo.*

Si sobre un cuerpo, que se desliza por una superficie inmóvil, no actúan otras fuerzas más que las de rozamiento, al fin y a la postre, aquél se parará. Examinemos este caso con el que se tropieza a menudo. Imaginémonos que ante un tren en movimiento aparece inesperadamente un obstáculo y el maquinista desconecta el motor y pone en acción los frenos. Desde este momento, sobre el tren sólo actúa la fuerza constante de rozamiento, ya que la fuerza de gravedad queda compensada por la reacción de los carriles, mientras que la fuerza de resistencia del aire es muy pequeña. Al pasar cierto tiempo t, después de recorrer la distancia l, llamada RECORRIDO DE FRENADO, el tren se para. Hallemos el tiempo t, necesario para que el tren se pare, y la distancia l que el tren recorre durante ese tiempo.

Bajo el efecto de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$, el tren se moverá con la aceleración $\vec{a} = \vec{F}_{roz}/m$.

Elegimos el eje de coordenadas X de forma que su dirección positiva coincida con la velocidad de movimiento del tren (fig. 133). La fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ y la aceleración $\vec{a}$, que ella provoca, se dirigen en sentido contrario al eje X, por eso las proyecciones de estos vectores sobre el eje X son negativas e iguales a los módulos de los propios vectores, tomados con signo opuesto. Así pues, el módulo de la aceleración $a = -a_x = F_{roz}/m$. Pero $a_x = (v_x - v_{0x})/t$, donde v_x y v_{0x} son las proyecciones de las velocidades final e inicial. Las dos son positivas, es decir, $v_x = v$ y $v_{0x} = v_0$. De donde

$$a = -\frac{v - v_0}{t}.$$

Nos interesa el tiempo t desde el comienzo del frenado del tren (cuando su velocidad es igual a v_0) hasta su parada ($v = 0$). En este caso

$$a = \frac{v_0}{t} \quad \text{y} \quad t = \frac{v_0}{a} = \frac{mv_0}{F_{roz}}$$

ESTO ES IMPORTANTE QUE LO SEPAN TODOS. Hallemos la distancia de frenado. Ésta es la proyección sobre el eje X del vector $\vec{s}$ de desplazamiento del tren durante el tiempo t. Para calcularlo, hagamos uso de la fórmula

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

En nuestro caso, $s_x = s$, $v_x = 0$, $v_{0x}^2 = v_0^2$ y $a_x = -a = -F_{roz}/m$. De aquí

$$l = s = \frac{mv_0^2}{2F_{roz}}.$$

De esta fórmula se desprende que el recorrido realizado hasta la parada, es proporcional al cuadrado de la velocidad. Si la velocidad se dobla, será necesario un recorrido cuatro veces mayor para que el tren pueda parar. Esto lo deben tener en cuenta los maquinistas de los trenes, los chóferes y, en general, todos aquellos que manejan medios de transporte. También es útil que lo tengan presente los transeúntes al cruzar las calles con gran movimiento. Para que puedan parar los cuerpos en movimiento, hace falta tiempo y espacio.

¿ ?

1. ¿Cómo está dirigida la aceleración comunicada al cuerpo por la fuerza de rozamiento?
2. ¿Podemos considerar uniformemente variado el movimiento bajo el efecto de la fuerza de rozamiento?
3. ¿Qué movimientos transcurren en la naturaleza sin la participación de la fuerza de rozamiento?
4. ¿Al frenar un cuerpo, podrá éste parar instantáneamente?
5. ¿De qué magnitudes depende el recorrido que realiza un cuerpo en movimiento durante el frenado hasta su parada? ¿Cómo varía dicho recorrido al aumentar dos veces cada una de esas magnitudes?
6. Con el fin de disminuir la distancia de frenado (es decir, el recorrido del cuerpo hasta su parada) se puede ya sea aumentar la fuerza de rozamiento, o bien disminuir la velocidad de movimiento. ¿Cuál de estos procedimientos es más eficaz?

Ejercicios 23

1. ¿A qué velocidad se movía un trineo de hélice, si después de desconectar el motor recorrió hasta pararse una distancia de 250 m? $\mu = 0{,}02$.
2. El chófer de un automóvil desconectó el motor y frenó bruscamente a una velocidad de 72 km/h. ¿Cuánto tiempo se moverá el auto hasta su parada, si $\mu = 0{,}6$? ¿Qué recorrido realizará en dicho tiempo?

Tarea

Citar ejemplos de movimientos de los cuerpos sólo bajo la acción de la fuerza de rozamiento.

6.8. Movimiento de un cuerpo bajo la acción de varias fuerzas

En los parágrafos anteriores de este capítulo hemos aclarado cómo se mueven los cuerpos, si están sometidos al afecto de una fuerza: elástica, de gravedad, de rozamiento. Pero, en realidad, en las condiciones terrestres, semejantes movimientos casi nunca tienen lugar. Junto con las fuerzas elástica y de gravedad, el cuerpo siempre se halla bajo el efecto de la fuerza de rozamiento.

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MECÁNICA, SI SOBRE EL CUERPO ACTÚAN VARIAS FUERZAS? Ante todo, recordemos que en la ecuación que expresa la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$\vec{F}$ es la resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo, o sea, la suma geométrica de los vectores de dichas fuerzas. Por esto, al comenzar a resolver cualquier problema, primero hay que aclarar qué fuerzas actúan sobre el cuerpo, cuáles son sus módulos y direcciones. A continuación, representando en un dibujo las fuerzas aplicadas al cuerpo, hallar su resultante y, haciendo uso de las leyes de movimiento de Newton, resolver el problema.

Sin embargo, se puede no recurrir a la suma geométrica de los vectores de las fuerzas. En 1.4 hemos sabido que la proyección de la suma de varios vectores sobre cualquier eje es igual a la suma de las proyecciones de dichos vectores sobre ese mismo eje. Esto nos permite sustituir la suma geométrica de los vectores por la suma algebraica de sus proyecciones.

En calidad de ejemplo examinemos la solución de los siguientes problemas.

PROBLEMA 1. Por un plano oblicuo, con ángulo de inclinación α (fig. 134), se mueve la barreta A de masa m. El coeficiente de rozamiento de la barreta con el plano es igual a μ. Hallar la aceleración de la barreta.

Solución. Sobre la barreta actúan tres fuerzas: la de gravedad $m\vec{g}$, la reacción del apoyo $\vec{N}$ (fuerza elástica) y la de rozamiento $\vec{F}_{roz}$. La dirección de estas fuerzas se indica en la figura. En conjunto, dichas fuerzas son las que comunican a la barreta la aceleración $\vec{a}$, dirigida a lo largo de ella hacia abajo[1].

Dirijamos los ejes de coordenadas X e Y, respectivamente, en paralelo al plano en declive y en sentido perpendicular a éste. En forma vectorial, la segunda ley de Newton se escribe así:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roz}. \tag{1}$$

Con el objeto de escribir esta ecuación en forma algebraica, hay que encontrar las proyecciones de los vectores sobre los ejes X y Y. Comencemos por las proyecciones sobre el eje X. La proyección a_x del vector de aceleración $\vec{a}$ sobre este eje es positiva e igual al módulo del vector $\vec{a}$ (¡éste es paralelo a X!): $a_x = a$. La proyección del vector de la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ es positiva y, como vemos del triángulo ABD

[1] Para simplificar la fig. 134, hemos mostrado las tres fuerzas aplicadas a un mismo punto, es decir, al centro de la barreta. En realidad, las fuerzas $\vec{F}_{roz}$ y $\vec{N}$ están aplicadas a la base de la barreta.

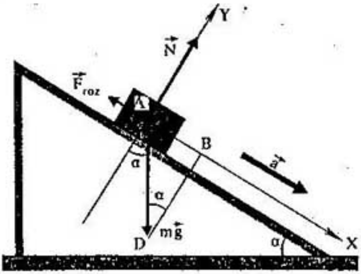


Fig. 134

(véase la fig. 134), igual a $mg \operatorname{sen} \alpha$. La proyección del vector de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ es negativa e igual a $-F_{roz}$. Por último, la proyección del vector de la fuerza de reacción del apoyo $\vec{N}$ es nula, ya que este vector es perpendicular al eje X: $N_x = 0$.

La ecuación de la segunda ley de Newton para las proyecciones sobre el eje X tiene la forma:

$$ma = mg \operatorname{sen} \alpha - F_{roz}. \tag{2}$$

Ahora determinemos las proyecciones sobre el eje Y. La del vector de aceleración $\vec{a}$ sobre dicho eje es nula (¡$\vec{a}$ es perpendicular al eje Y!): $a_y = 0$. La proyección del vector de la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ en dicho eje es negativa e igual, como vemos en la fig. 134, a $-mg \cos \alpha$. La proyección del vector de la fuerza de reacción del apoyo $\vec{N}$ es positiva e igual a su módulo: $N_y = N$. Para acabar, la proyección del vector de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ es igual a cero.

La ecuación de la segunda ley de Newton para las proyecciones sobre el eje Y se escribe en la forma:

$$0 = N - mg \cos \alpha, \tag{3}$$

de donde

$$N = mg \cos \alpha.$$

Ya sabemos que la fuerza de rozamiento (véase 5.6) es en cuanto a su módulo igual a μN. Por eso, $F_{roz} = \mu mg \cos \alpha$. Poniendo esta expresión para la fuerza de rozamiento en la fórmula (2), obtenemos:

$$ma = mg \operatorname{sen} \alpha - \mu mg \cos \alpha.$$

Después de simplificar eliminando m, hallaremos la aceleración buscada de la barreta:

$$a = g (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Como se infiere de esta fórmula, esta magnitud es menor que la aceleración de la caída libre.

¿PARA QUÉ SE USAN LOS PLANOS INCLINADOS? Incluso al no haber fuerza de rozamiento ($\mu = 0$), el módulo de la aceleración de un cuerpo que se desliza por un plano oblicuo es igual a $g \operatorname{sen} \alpha$, o sea, menor que g. Precisamente por esta causa, los planos inclinados se emplean con profusión en la práctica, ya que permiten reducir la aceleración durante la caída y el movimiento hacia arriba. Esto significa, que con ello, es como si la fuerza de gravedad disminuyese ($mg \operatorname{sen} \alpha$ en lugar de mg). Claro está que la fuerza de atracción hacia la Tierra en realidad no disminuye (siempre es igual a mg). Lo que pasa es que, durante el movimiento por un plano inclinado, sobre el cuerpo, además de la fuerza de gravedad, actúa también una fuerza elástica, la de reacción del apoyo. Su efecto conjunto acarrea la disminución de la aceleración.

Semejante propiedad del plano inclinado se utiliza en tales "dispositivos" como la cuña, el cuchillo, el arado, la carretilla. El tornillo también es un plano inclinado, pero enrollado alrededor de un espárrago.

Si un cuerpo se mueve por un plano inclinado uniformemente, entonces $a = 0$, o sea, $\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha = 0$, o bien

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu. \tag{4}$$

Esta fórmula permite con relativa sencillez medir el coeficiente de rozamiento de deslizamiento. Para ello, variando el ángulo de inclinación del plano, en el que yace el cuerpo, se determina tal valor de dicho ángulo, con el que el cuerpo comienza a deslizarse uniformemente por el plano. Después de medir el ángulo α de inclinación del plano respecto del horizonte, aplicando la fórmula (4) se halla μ.

Examinemos un ejemplo más que tiene interés, ya que en él se trata del movimiento no de uno, sino de dos cuerpos. Al resolver semejantes problemas, hay que aplicar la segunda ley de Newton a cada cuerpo y resolver conjuntamente las ecuaciones obtenidas.

PROBLEMA 2. Por una polea inmóvil pasa un hilo en cuyos extremos están fijadas las cargas de masas m_1 y m_2, con la particularidad de que $m_1 > m_2$. Considerando que las masas del hilo y la polea son pequeñas en comparación con m_1 y m_2 y que en la polea no hay rozamiento, hallar la aceleración de las cargas.

Solución. Dirigimos el eje de coordenadas Y verticalmente hacia arriba (fig. 135).

Si dejamos que este sistema de cuerpos funcione por sí mismo, la carga de masa m_1 se moverá hacia abajo y la de m_2, a la inversa. Hallemos la aceleración $\vec{a}$ (en cuanto a su módulo será igual para los dos cuerpos, si despreciamos el alargamiento del hilo: $a_1 = a_2 = a$). Para esto, vamos a escribir las ecuaciones de la segunda ley de Newton para cada una de las cargas.

Sobre la carga izquierda actúa la fuerza de gravedad $m_1\vec{g}$ y la fuerza de tensión del hilo $\vec{T}$ (fuerza elástica). La proyección de la fuerza de gravedad sobre el eje Y es igual al módulo del vector $m_1\vec{g}$ tomado con signo contrario: $m_1 g_y = -m_1 g$. La proyección de la fuerza $\vec{T}$ es igual al módulo del vector $\vec{T}$, o sea, $T_y = T$. La proyección de la aceleración $\vec{a}$ es igual al módulo del vector $\vec{a}$ con signo opuesto: $a_y = -a$. La ecuación

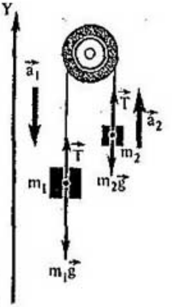


Fig. 135

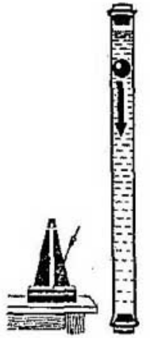


Fig. 136

de la segunda ley de Newton tiene la forma:

$$-m_1a = -m_1g + T. \qquad (1)$$

Sobre la carga derecha actúa la fuerza de gravedad $m_2\vec{g}$ y la fuerza de tensión $\vec{T}$ (la misma que sobre la carga izquierda). La proyección de la fuerza de gravedad es igual al módulo del vector $m_2\vec{g}$ con signo contrario: $m_2g_y = -m_2g$. La proyección de la fuerza $\vec{T}$ es igual al módulo del vector $\vec{T}$, o sea, $T_y = T$. La proyección de la aceleración $\vec{a}$ es igual al módulo del vector de aceleración $\vec{a}$, es decir, $a_y = a$.

La ecuación de la segunda ley de Newton para la carga derecha tendrá el aspecto:

$$m_2a = -m_2g + T. \qquad (2)$$

Sustrayendo (1) de (2)

$$m_2a - (-m_1a) = -m_2g + T - (-m_1g) - T,$$

obtenemos:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g.$$

De donde

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

¿PARA QUÉ SE USAN LAS POLEAS? Como la diferencia de las masas de las cargas es menor que su suma, la aceleración a es menor que la de la caída libre. Los bloques se utilizan para obligar a que el cuerpo caiga con aceleración menor que g. En este fenómeno se basa la aplicación de los contrapesos en los ascensores y otros dispositivos de elevación.

CAÍDA DE UN CUERPO EN EL SENO DE UN GAS O LÍQUIDO. Un interesante ejemplo de movimiento rectilíneo de un cuerpo sometido al efecto de dos fuerzas, es la caída de éste en el seno de un gas o líquido. En este caso, sobre el cuerpo actúan la fuerza de gravedad y la de resistencia del gas o el líquido, con la cual nos familiarizamos en el 5.6.

Si despreciamos todas las demás fuerzas, podemos considerar que en el instante en que tan sólo empieza la caída del cuerpo ($v = 0$) sobre él actúa únicamente la fuerza de gravedad $m\vec{g}$. La fuerza de resistencia aún no existe. Pero en cuanto comience el movimiento del cuerpo, aparecerá la fuerza de resistencia, es decir, la fuerza de rozamiento viscoso, que crece junto con la velocidad y que está dirigida en sentido opuesto a ella.

Puesto que la fuerza de gravedad se mantiene constante, en tanto que la fuerza de resistencia, dirigida en sentido contrario, crece al aumentar la velocidad del cuerpo, sin duda alguna llegará un momento en que los módulos de ambas se igualarán. En cuanto esto ocurra, la resultante de las dos fuerzas se anulará. También será igual a cero la aceleración y el cuerpo comenzará a moverse a velocidad constante. Por ejemplo, después de saltar con bastante rapidez, el paracaidista empezará a caer a velocidad constante, lo mismo ocurre con los copos de nieve y las gotas de lluvia.

Cuando un cuerpo cae en el seno de un líquido, deberá tenerse en cuenta una fuerza más, también dirigida hacia arriba, a saber, la fuerza de empuje de Arquímedes. Pero como ésta es constante y no depende de la velocidad, ella no obstaculiza el establecimiento del movimiento uniforme del cuerpo que cae.

En un experimento muy sencillo, podemos observar el movimiento de un cuerpo en el seno de un líquido a velocidad constante. Un tubo de cristal, de aproximadamente 1 m de largura, se llena de agua o glicerina hasta el borde. A continuación, sobre el agua se pone una bolita de acero (fig. 136). Es fácil cerciorarse de que la bolita descenderá en el líquido a velocidad constante. Esto se percibirá si en la superficie del tubo se hacen con pintura divisiones y se miden las distancias que la bolita pasa en iguales intervalos de tiempo, proporcionados por el sonido de un metrónomo.

¿ ?

1. ¿Cómo se enuncia la segunda ley de Newton si sobre el cuerpo actúan varias fuerzas?
2. ¿Qué fuerzas actúan sobre un cuerpo que resbala por un plano inclinado con aceleración constante?

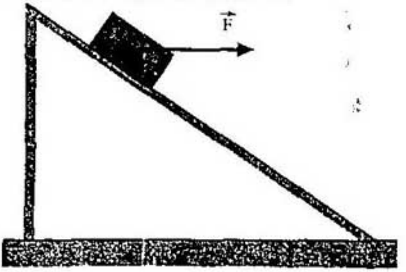


Fig. 137

3. ¿Cómo se moverá un cuerpo por un plano inclinado, si la proyección de la fuerza de gravedad sobre una recta paralela a dicho plano es numéricamente igual a la fuerza de rozamiento?

Ejercicios 24

1. Mediante una construcción, hallar la suma geométrica de las fuerzas aplicadas a una barreta que se encuentra en un plano inclinado (véase la fig. 134). ¿Cómo está dirigida la resultante $\vec{F}$ de estas fuerzas respecto del plano inclinado?
2. Desde el vértice de un plano inclinado de 20 cm de altura se desliza una barreta. Determinar la velocidad de la barreta al final del plano inclinado. El rozamiento no se toma en consideración.
3. Un trineo resbala por un plano inclinado de 10 m de largura durante 2 s. Hallar el ángulo de inclinación del plano. El rozamiento no se toma en consideración.
4. En un plano inclinado de 5 m de altura y 10 m de largura se encuentra un cuerpo de 50 kg de masa, sobre el que actúa la fuerza $\vec{F}$ dirigida en sentido horizontal e igual a 300 N (fig. 137). Determinar la aceleración del cuerpo (el rozamiento se desprecia).
5. Calcular la aceleración de un cuerpo que se desliza por un plano inclinado, si la altura y la longitud de sus bases son iguales, mientras que el coeficiente de rozamiento del cuerpo sobre el plano es igual a 0,2.

Tarea

Presentar ejemplos de cómo se utilizan los planos inclinados. ¿En qué consiste su utilidad en dichos ejemplos?

6.9. Movimiento en las curvas

Como ya hemos visto más de una vez, para que un cuerpo se mueva describiendo una circunferencia, es preciso que la fuerza aplicada a él esté dirigida hacia el centro de aquélla. Si sobre el cuerpo actúan varias fuerzas, hacia el centro de la circunferencia deberá dirigirse la resultante de esas fuerzas.

En calidad de ejemplo, examinemos el movimiento de un vagón de ferrocarril por una curva de la vía horizontal (fig. 138).

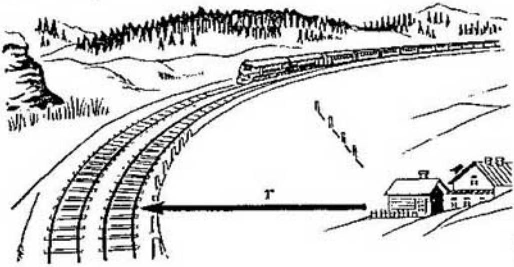


Fig. 138

Fig. 139

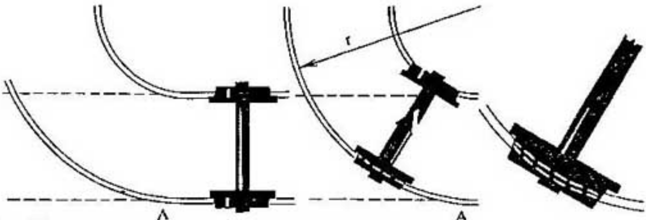


Fig. 140

Mientras el tren se mueve por un sector rectilíneo de la vía a velocidad constante $\vec{v}$, sobre cada vagón actúa, como es lógico, la fuerza de gravedad, pero ella se equilibra por la fuerza elástica (reacción de los rieles) dirigida hacia arriba. En lo que atañe a la fuerza de rozamiento, ésta se equilibra por la fuerza que desarrolla la locomotora. Pero he aquí que el vagón llega a una curva de la vía. En este lugar él gira y comienza a moverse describiendo el arco de una circunferencia. ¿Qué fuerza es la que obliga al vagón a variar la dirección de su velocidad, es decir, moverse con aceleración? Ésta es la fuerza elástica (fuerza de reacción) que actúa por parte del riel sobre las ruedas del vagón.

Las ruedas de los vagones de ferrocarril tienen la llamada pestaña que entra en contacto con el riel no por arriba, sino que por el costado (fig. 139). Mientras el vagón se mueve por un sector rectilíneo de la vía, la pestaña no desempeña notable papel y sólo se deforma aquella parte de la rueda que hace contacto con la parte superior del riel. Después de pasar el punto A (fig. 140), la rueda, al seguir su movimiento en la anterior dirección, actúa sobre el riel mediante la pestaña y lo deforma por el costado, el riel se flexiona hacia el exterior (también se deforma la propia pestaña). Con ello, surge la fuerza elástica $\vec{F}$, dirigida perpendicularmente a la superficie lateral del riel, que obliga al vagón a moverse sobre una circunferencia. Si las ruedas del vagón no tuvieran pestañas, semejante fuerza no podría aparecer y el vagón abandonaría los rieles.

La aceleración del vagón, que se mueve a la velocidad $\vec{v}$ por una curva de radio r, es igual en módulo a v^2/r. Por esta causa, la fuerza elástica $\vec{F}$ que actúa sobre la pestaña desde el riel deformado (y por lo tanto, sobre el vagón) y que provoca dicha aceleración, según la segunda ley de Newton debe ser igual en cuanto a su módulo a:

$$F = \frac{mv^2}{r},$$

donde m es la masa del vagón.

La deformación del riel alcanza una magnitud tal, con la que la fuerza elástica, provocada por ella, comunica al vagón la aceleración v^2/r. Esta deformación es muy pequeña y a la vista imperceptible (línea blanca a trazos en la fig. 140).

Para disminuir el desgaste de los rieles y las pestañas es preciso

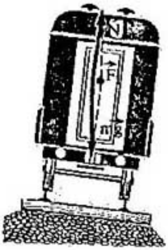


Fig. 141

reducir la fuerza de rozamiento entre ellos, es decir, disminuir la fuerza de presión del riel sobre la pestaña. Con este fin, el terreno debajo de la vía férrea se construye en las curvas con cierta inclinación hacia el centro de la curva (fig. 141). En semejante caso, la fuerza $\vec{N}$ de reacción de los rieles (fuerza elástica) no equilibra la fuerza de gravedad $m\vec{g}$. Su resultante $\vec{F}_1$ está dirigida, aproximadamente, al centro de la curva. Claro está que esto "alivia" el viraje, ya que disminuye el módulo de la fuerza elástica $\vec{F}$ que actúa desde el riel sobre la pestaña. En efecto, ahora esa misma aceleración centrípeta v^2/r es comunicada al vagón por dos fuerzas: $\vec{F}$ y $\vec{F}_1$, por lo tanto, siendo pequeño el ángulo de inclinación podemos escribir:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{F + F_1}{m},$$

de donde

$$F = \frac{mv^2}{r} - F_1.$$

De aquí vemos que el módulo de la fuerza que actúa sobre la pestaña es menor en la magnitud F_1. Por eso será menor el desgaste del riel y de la pestaña.

Las ruedas del automóvil no tienen pestaña. Durante el movimiento de éste por las curvas de la carretera, la aceleración centrípeta es comunicada por la fuerza de rozamiento seco entre las cubiertas de las ruedas y el recubrimiento de asfalto (véase la lámina de la pág. 234).

¿ ?

1. ¿Cómo debe estar dirigida la fuerza aplicada a un cuerpo para que el movimiento rectilíneo se convierta en curvilíneo (en una curva)?
2. En este parágrafo se examina el caso de movimiento de un vagón por una curva de la vía férrea. ¿La resultante de qué fuerzas comunica al vagón la aceleración centrípeta?
3. ¿La resultante de qué fuerzas comunica la aceleración centrípeta cuando el asiento de la vía no está inclinado?
4. ¿Puede la fuerza de rozamiento de deslizamiento comunicar al cuerpo la aceleración centrípeta?
5. ¿Por qué es peligroso hacer virajes en una carretera cubierta de hielo?

Ejercicios 25

1. Un automóvil, en movimiento a 108 km/h de velocidad, debe pasar una curva de radio de 50 m. ¿Es posible hacerlo sin peligro sin reducir la velocidad, siendo la fuerza de rozamiento en reposo de las ruedas del vehículo con el asfalto igual a 4000 N, mientras que la masa del auto es 1000 kg? ¿Con qué velocidad máxima de éste se puede pasar la curva sin riesgo?
2. Un tren se mueve describiendo una curva cuyo radio es 500 m. La anchura de la vía es 1,524 m. El riel exterior está 12 cm más alto que el interior. ¿A qué velocidad de movimiento del tren en la curva, las pestañas de las ruedas no hacen presión sobre los rieles?

6.10. ¿Bajo qué condiciones los cuerpos están en movimiento rectilíneo? Centro de masas y centro de gravedad

Hasta el momento, al estudiar el movimiento de los cuerpos, sometidos a la acción de diversas fuerzas, no hemos prestado atención a que todos aquéllos tienen dimensiones. Al determinar la aceleración de los cuerpos, los considerábamos como puntos materiales.

Semejante simplificación es válida cuando el cuerpo se mueve de modo rectilíneo. Sin embargo, hay que aclarar hacia qué punto del cuerpo debe aplicarse la fuerza, para que su movimiento acelerado sea en realidad de traslación.

Realicemos el siguiente experimento. Tomemos una regla ancha. Fijemos en el punto A de su extremo un hilo y con cierta fuerza $\vec{F}$ tiremos de ella en dirección perpendicular a su eje (fig. 142). En este caso, la regla girará. Al realizar semejante giro, diversos puntos de la regla realizarán recorridos desiguales y se moverán a distintas velocidades, es decir, sus movimientos son diferentes y el movimiento de la regla no será de

Fig. 142

Fig. 143

Fig. 144

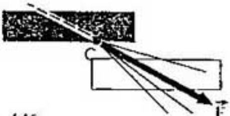


Fig. 145

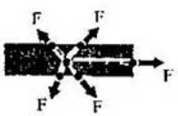


Fig. 146

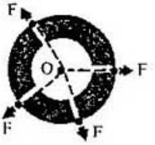


Fig. 147

traslación.

Cambiemos la dirección de la fuerza: tiremos de la regla en sentido de su lado largo hacia la derecha (fig. 143). Ahora, la regla se mueve de forma que las velocidades y los desplazamientos de todos sus puntos son iguales. La regla realiza movimiento de traslación.

Si la fuerza $\vec{F}$ no está equilibrada por otras fuerzas, el cuerpo se moverá con aceleración. Si el hilo está sujeto en el punto A, es fácil cerciorarse de que existe sólo una recta a lo largo de la cual debe estar dirigida la fuerza $\vec{F}$ para que ésta provoque el movimiento acelerado *de traslación* de la regla. Cuando la fuerza actúa a lo largo de cualquier otra recta, la regla virará.

Se puede cambiar la dirección de la fuerza por la contraria fijando el hilo en el punto B (fig. 144). De nuevo, el movimiento de la regla será de traslación. Quiere decir que sólo tiene importancia la posición de la recta a lo largo de la cual actúa la fuerza (línea de acción de la fuerza).

Ahora, sujetemos el hilo a cualquier otro punto de la regla, por ejemplo al C, (fig. 145). Cambiaremos de nuevo las direcciones de tensión del hilo (en la figura algunas de las direcciones se muestran con rectas que parten del punto C). De nuevo llegamos a la convicción de que la regla realiza movimiento de traslación sólo en el caso, en que la fuerza está dirigida a lo largo de una determinada recta. En la figura dicha dirección se muestra con una línea roja de trazos. Para todas las demás direcciones de la fuerza, aplicada al punto C, la regla virará obligatoriamente.

Al fijar el hilo a otros puntos de la regla, nos cercioraremos de que en cada uno de ellos existe una dirección de la fuerza, con la que la regla se pone en movimiento rectilíneo, sin virar. En la fig. 146 se muestra cómo deben estar dirigidas las fuerzas, aplicadas a diversos puntos de la regla, para que el movimiento de ésta sea de traslación. La práctica muestra que las rectas, a lo largo de las cuales actúan estas fuerzas, se reúnen en el punto O.

CENTRO DE MASAS. Semejantes experimentos con diversos cuerpos, nos conducen a la importante deducción de que para cada cuerpo hay un punto tal, en el que se cruzan las direcciones de acción de las fuerzas que comunican al cuerpo movimiento *de traslación* acelerado. Dicho punto ha recibido el nombre de CENTRO DE MASAS. Toda fuerza que actúa a lo largo de una recta que no pase por el centro de masas provoca el giro del cuerpo.

Llamamos centro de masas el punto por el cual debe pasar la dirección de acción de la fuerza que comunica al cuerpo movimiento de traslación acelerado.

Con ayuda del experimento con la regla, es fácil cerciorarse de que el centro de masas coincide con el punto de intersección de las diagonales. Pero esto sólo sucede cuando la regla es homogénea (está fabricada de un material íntegro), tiene forma regular e igual grosor. Si, por ejemplo, ella fuese fabricada de dos mitades: una mitad de madera y la otra, de acero, el centro de masas se encontraría en la segunda mitad, es decir, más cerca de aquella de las mitades que tiene mayor masa.

El centro de masas puede encontrarse también fuera del cuerpo. Por ejemplo, está claro que el movimiento de traslación de un anillo homogéneo (fig. 147) sólo puede tener lugar cuando las fuerzas que hacia él se aplican están dirigidas en sentido de sus radios. Las líneas de acción de semejantes fuerzas se reúnen, como es lógico, en el centro geométrico del anillo. Allí se encuentra también el centro de masas.

Si distintas partes del anillo están hechas de diferentes materiales, el centro de masas puede no coincidir con el centro geométrico del anillo. En semejante caso, ese punto debe buscarse por vía experimental. Es verdad, que hay procedimientos para calcular las coordenadas del centro de masas, pero ellos son difíciles y hay ocasiones cuando esto resulta imposible de hacer.

¿Pero para qué necesitamos conocer la posición del centro de masas? El problema radica en que si el cuerpo está en movimiento *de traslacion* bajo el efecto de una o varias fuerzas, esto quiere decir que dicha fuerza, o la resultante de todas las fuerzas, pasa por el centro de masas del cuerpo. En semejante caso, el centro de masas del cuerpo se mueve como si en él estuviera concentrada toda la masa del cuerpo y aplicadas todas las fuerzas que actúan sobre el mismo. *Por eso, cuando vemos que el cuerpo está en movimiento acelerado de traslación, quiere decir que la resultante de las fuerzas, aplicadas a él, pasa por su centro de masas, como si en éste estuviera concentrada toda la masa del cuerpo, además la aceleración del cuerpo es la del centro de masas.* Así pues, *en lugar de considerar el movimiento del cuerpo, examinamos el movimiento de un punto material, llamado centro de masas.* Sin decir nada sobre esto, así hemos venido obrando en los capítulos anteriores del presente libro.

CENTRO DE GRAVEDAD. Un caso particular del movimiento de traslación es el movimiento del cuerpo bajo el efecto de la fuerza de gravedad, claro está, si el cuerpo no fue puesto en rotación antes de empezar la caída. Pero esta fuerza actúa sobre todos los puntos del cuerpo. Y ya que bajo el efecto de todas esas fuerzas el cuerpo adquiere movimiento de traslación, esto significa que su resultante, para cualquier posición del cuerpo, pasa por su centro de masas. Por este motivo, con frecuencia, este último recibe el nombre de CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO.

6.11. ¿Son siempre justas las leyes de mecánica de Newton? (movimientos desde distintos puntos de vista)

Si echamos una mirada a lo que ya hemos estudiado, en primer lugar debemos prestar atención a las ideas fundamentales de mecánica.

La *primera* idea consiste en que si sobre el cuerpo no actúan fuerzas o la resultante de todas las fuerzas es nula, aquél se encuentra en reposo o se mueve a velocidad constante en módulo y dirección. Pero si el cuerpo está en movimiento acelerado, éste se produce obligatoriamente bajo el efecto de una fuerza. Cuando existe una fuerza son imposibles

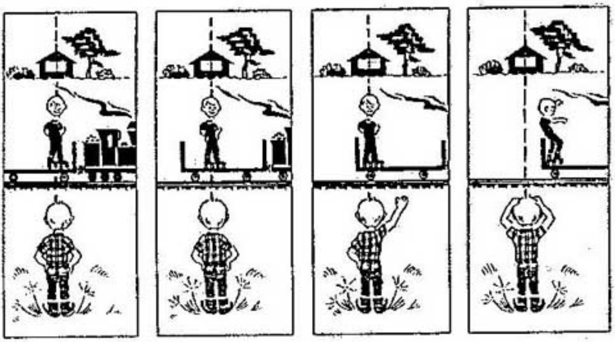


Fig. 148

el reposo o el movimiento rectilíneo uniforme, lo mismo que el movimiento acelerado no puede tener lugar sin la acción de una fuerza.

La *segunda* idea fundamental radica en lo siguiente: para que sobre el cuerpo dado actúe una fuerza, es preciso otro cuerpo, lejano o próximo, grande o pequeño.

Con ese cuerpo puede haber contacto directo, pero puede no haberlo. No obstante, tras cada fuerza se "oculta", obligatoriamente, cierto cuerpo o varios cuerpos. Es decir, la fuerza es de origen material.

En estas dos ideas se encierra toda la esencia de la mecánica de Newton.

¿Pero son siempre justas las afirmaciones fundamentales que acabamos de presentar? Para responder a esta pregunta realicemos mentalmente un experimento que puede ser organizado en la realidad. (Sobre esto hablamos parcialmente en 4.1.)

En una plataforma de ferrocarril, enganchada a una locomotora y que tiene paredes delantera y trasera, se encuentra un pasajero. Supongamos que el suelo de la plataforma está hecho de un material muy duro y liso, además el pasajero está calzado con patines de rodillos, capaces de rodar con muy pequeño rozamiento (fig. 148). Supongamos, además, que en la estación quedó el amigo del pasajero, con el fin de observar los fenómenos que transcurren en la plataforma. Y, he aquí, la plataforma "arrancó", es decir, se puso en movimiento con *aceleración*.

PUNTO DE VISTA DEL OBSERVADOR INMÓVIL. El observador inmóvil que quedó en la estación verá que, después de que la plataforma se puso en marcha, el pasajero sigue manteniéndose en su lugar, simplemente el suelo de la plataforma se mueve debajo de él. Conociendo las leyes de mecánica, este observador dirá que así tiene que ser. El pasajero queda en reposo a causa de que las fuerzas que sobre él actúan – la de gravedad y la elástica de la plataforma – están dirigidas verticalmente y se compensan entre sí. Y sólo cuando hacia el pasajero se acerca de pleno la pared trasera, él comenzará a moverse junto con la plataforma. Esto también concuerda con las leyes de mecánica: durante su movimiento, la pared se pone en contacto con el pasajero, entra en interacción con él y se deforma. Como resultado surge la fuerza elástica que comunica al pasajero una aceleración igual a la de la plataforma.

PUNTO DE VISTA DEL PASAJERO. Al pasajero sobre los patines de rodillos le parece que la situación es otra por completo. El pasajero percibirá que de repente se ha puesto en movimiento *respecto de la plataforma*, avanzando hacia su pared trasera con cierta aceleración. Desde su punto de vista, esto no concuerda con las leyes de mecánica. Él se desconcertará si intenta aclarar qué cuerpo es el que le ha comunicado aceleración, mas no podrá descubrir semejante cuerpo. ¿Cuál de los dos observadores tiene la razón?

Como es natural, la cuestión no radica en las singularidades personales de los observadores, sino en los sistemas de referencia respecto a los cuales ellos consideran el movimiento. El observador en la estación habla del movimiento respecto de la Tierra, que según él es un sistema inmóvil de referencia. En lo que atañe al pasajero en la plataforma, éste considera el movimiento con relación al sistema de referencia ligado con la plataforma, que en cuanto a la Tierra se mueve con aceleración. Todo el asunto reside, precisamente, en el movimiento acelerado de un sistema de referencia, es decir, la plataforma, con relación a otro, o sea, la Tierra.

Las leyes de mecánica de Newton sólo se cumplen bajo condición de que los movimientos se estudien respecto de sistemas inerciales de referencia.

Recordemos que se llaman inerciales aquellos sistemas de referencia en los que, cuando no hay fuerzas, los cuerpos no reciben aceleración (el pasajero queda inmóvil, hacia él se acerca la pared de la plataforma). Pero si en estos sistemas de referencia los cuerpos reciben aceleración, quiere decir que sobre ellos actúa alguna fuerza *por parte de otros cuerpos* (la pared trasera de la plataforma entró en contacto con el pasajero y éste comenzó a moverse con aceleración junto con la plataforma).

En el sistema de referencia ligado con la plataforma, las leyes de mecánica no son válidas. Con relación a este sistema el pasajero se mueve con aceleración cuando sobre él no actúan otros cuerpos. Mientras que cuando surge una fuerza real (la elástica de la pared trasera), el pasajero se para. El incumplimiento de las leyes de Newton en este sistema de referencia radica en su movimiento acelerado respecto del sistema de referencia, en el que estas leyes se cumplen, es decir, con relación a la Tierra. En efecto, en cuanto la plataforma, después de adquirir velocidad, comience a moverse uniformemente, el pasajero sobre los patines de rodillos, rodará respecto del tren sin aceleración. Las leyes de mecánica "entran" en sus derechos.

Si las leyes de Newton son válidas al examinar el movimiento en lo que atañe a un sistema de referencia, también lo serán respecto de cualquier otro sistema de referencia que, con relación al primero, está en movimiento rectilineo y uniforme.

Existe un conjunto infinito de semejantes sistemas. En todos los sistemas inerciales de referencia las leyes de movimiento son idénticas. En esto consiste el llamado PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO.

Todos los sistemas de referencia que se mueven con aceleración, respecto de un sistema inercial, reciben el nombre de NO INERCIALES, ya que en ellos la ley de inercia no se cumple, lo mismo que las leyes segunda y tercera de Newton.

¿ ?

1. Una pequeña carga (péndulo) está colgada de un hilo suspendido en el techo de un vagón: ¿Qué sucederá con el péndulo al frenar el vagón? ¿Cómo explicará este fenómeno: a) un observador parado en el andén; b) un observador que se encuentra en el vagón?
2. ¿Se podrá determinar la velocidad de movimiento y la aceleración de un buque, estando en un camarote con la ventanilla cerrada y observando una pequeña carga suspendida del techo del camarote?

Tareas

1. Inventen un dispositivo que al estar fijado en el cuerpo permita medir su aceleración.
2. Hacer consideraciones análogas a las aducidas en este parágrafo, cuando la plataforma gira uniformemente.

Lo más importante en el sexto capítulo

Cualquier problema de mecánica se resuelve con ayuda de las leyes de Newton, si conocemos, además de las coordenadas iniciales y la velocidad, las fuerzas aplicadas al cuerpo, es decir, si sabemos cómo dependen éstas de las coordenadas o las velocidades. Con ello, hay que tener en cuenta *que la fuerza o la resultante de varias fuerzas determina no la velocidad (su módulo y dirección), sino que la aceleración del cuerpo.* Por esta causa, los cuerpos se desplazan no obligatoriamente en el sentido en que está dirigida la fuerza. No sólo las fuerzas aplicadas al cuerpo son las que determinan la trayectoria de éste, sino que también las condiciones iniciales, es decir, el módulo y la dirección de la velocidad inicial del cuerpo.

El movimiento de los cuerpos puede ser considerado como el de puntos materiales cuando aquéllos avanzan *en movimiento de traslación.* Pero un cuerpo se encuentra en movimiento de traslación sólo en aquel caso, en que la línea, a lo largo de la que está dirigida la resultante de todas las fuerzas, pasa por el *centro de masas* del cuerpo. En caso contrario, además de dicho movimiento, se producirá el giro del cuerpo en torno de cierto eje.

Si se examina el movimiento de un cuerpo con relación a un sistema *no inercial* de referencia (sistema de referencia que se mueve con aceleración respecto de cierto sistema inercial), las leyes de Newton no son válidas. Respecto a un sistema no inercial de referencia, el cuerpo se mueve con una aceleración que no viene provocada por las fuerzas que se le aplican, mientras que al haber fuerzas puede moverse uniformemente.

7 ELEMENTOS DE ESTÁTICA (EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS)

¿QUÉ SE ESTUDIA EN ESTÁTICA?

Ya sabemos que las leyes de Newton nos permiten conocer cuáles son las aceleraciones que adquieren los cuerpos bajo el efecto de las fuerzas aplicadas a ellos.

Pero con frecuencia, es de importancia conocer bajo qué condiciones no reciben aceleración los cuerpos sobre los que pueden actuar diversas fuerzas. De estos cuerpos se dice que están en estado de equilibrio. En este estado se encuentran, en particular, los cuerpos en reposo.

Es de suma importancia para la práctica, conocer las condiciones con las que los cuerpos se hallan en reposo, por ejemplo, al construir edificios, puentes, toda clase de apoyos, suspensiones, así como en la producción de máquinas, instrumentos, aparatos, etc.

Como es lógico, es intolerable, por ejemplo, que la torre del Centro de televisión de Moscú en Ostánkino, que debe encontrarse inmóvil sobre sus apoyos, bajo el empuje del viento adquiera aceleración y se desplace de dichos apoyos. Las leyes de Newton nos permiten aclarar qué condiciones aseguran, precisamente, el equilibrio y, ante todo, el estado en reposo del cuerpo.

Recibe el nombre de estática la parte de la mecánica en la que se estudia el equilibrio de las fuerzas.

Ya sabemos que todo cuerpo puede estar en movimiento de traslación y, además, de rotación o girar alrededor de cierto eje. Claro está que en caso de equilibrio no debe variar el movimiento de traslación, ni el de rotación del cuerpo. En particular, si se requiere que el cuerpo se encuentre en reposo, él no debe tener movimiento de traslación, ni de rotación o giro en torno de cierto eje.

Consideremos por separado las condiciones de equilibrio de los cuerpos para estos dos tipos de movimiento.

7.1. Equilibrio de cuerpos que no están en rotación

Al estudiar el movimiento de traslación de un cuerpo, se puede examinar el movimiento de tan sólo uno de sus puntos, a saber, de su centro de masas. En este caso debemos considerar que en el centro de masas está concentrada toda la masa del cuerpo, así como está aplicada la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. De la segunda ley de Newton se desprende que la aceleración de este punto es igual a cero, si la suma geométrica de todas las fuerzas aplicadas a él, o sea, la resultante de dichas fuerzas, es nula. Ésta es la condición de equilibrio de un cuerpo que no está en rotación.

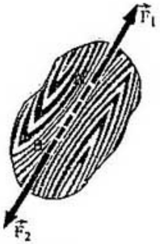


Fig. 149

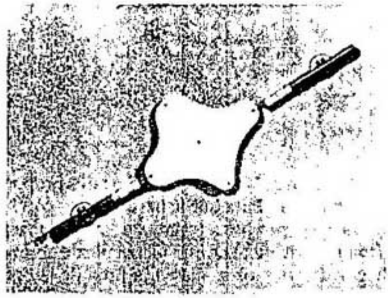


Fig. 150

Para que un cuerpo, que no se encuentra en rotación, esté en equilibrio es necesario que sea nula la resultante de las fuerzas aplicadas al mismo.

Pero si la suma geométrica de las fuerzas es igual a cero, la suma de las proyecciones de los vectores de estas fuerzas sobre cualquier eje también es nula. Por ello la condición de equilibrio del cuerpo se puede formular también así:

Para que un cuerpo que no está en rotación se encuentre en equilibrio, es preciso que la suma de las proyecciones de las fuerzas, aplicadas al cuerpo sobre cualquier eje, sea igual a cero.

Por ejemplo, está en equilibrio un cuerpo al que se han aplicado dos fuerzas iguales que actúan a lo largo de una recta, pero dirigidas en sentidos contrarios (fig. 149). En la fig. 150, se muestra cómo se puede ilustrar en la escuela semejante caso.

El estado de equilibrio no es obligatoriamente el de reposo.

De la segunda ley de Newton se deduce que, cuando la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo es igual a cero, dicho cuerpo puede estar en movimiento rectilíneo y uniforme. Con este movimiento, el cuerpo también se encuentra en equilibrio. Por ejemplo, un paracaidista, después de que comenzó a caer a velocidad constante, se encuentra en estado de equilibrio.

En la fig. 149 las fuerzas están aplicadas al cuerpo en distintos puntos. Pero ya nos hemos cerciorado de que tiene importancia, no el punto de aplicación de la fuerza, sino que la recta a lo largo de la cual ella actúa. El traslado de dicho punto a lo largo de la línea de acción de la fuerza, nada varía tanto en el movimiento del cuerpo, como en el estado de equilibrio. Está claro, por ejemplo, que nada variará si en lugar de tirar de la vagoneta, como se muestra en la fig. 151, empezamos a empujarla (fig. 152).

Si la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo no es nula, entonces para que éste se encuentre en equilibrio es preciso aplicarle una fuerza adicional, de módulo igual al de la resultante, pero de dirección opuesta.

Aclaremos lo dicho al resolver el siguiente problema.

PROBLEMA. ¿Cómo mantener en equilibrio una barca sobre la que actúan la corriente del río y el viento que sopla desde la orilla (fig. 153)?

Solución. Hallemos la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, provocadas por el viento y la corriente del agua. Con este fin, hacemos uso de la regla del

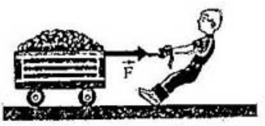


Fig. 151

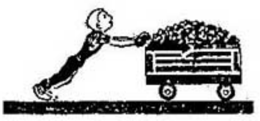


Fig. 152

paralelogramo. La diagonal de éste nos proporciona el módulo y la dirección de la resultante $\vec{F}$. Para que la barca esté en equilibrio, hacia ella se debe aplicar la fuerza $\vec{F}_y$ igual a esta resultante en módulo, pero de dirección contraria. Por ejemplo, en calidad de esta fuerza puede obrar la fuerza elástica de un cable uno de cuyos extremos se fija en la proa de la barca y el otro, en la orilla. Si, por ejemplo, la fuerza con que la corriente de agua actúa sobre la barca es igual a 150 N, mientras que la del viento, a 100 N, la resultante de estas fuerzas perpendiculares entre sí, puede ser calculada empleando el teorema de Pitágoras:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2},$$

$$F = \sqrt{(100\text{N})^2 + (150\text{N})^2} \approx 180\text{N}.$$

Por lo tanto, la barca puede sujetarse empleando un cable capaz de resistir una tensión de no menos de 180 N.

¿ ?

1. ¿Qué significa la expresión: el cuerpo (o sistema de cuerpos) está en equilibrio?
2. A un cuerpo están aplicadas varias fuerzas, cuya resultante no es nula. ¿Qué deberá hacerse para que el cuerpo resulte en equilibrio?
3. ¿En qué consiste la condición de equilibrio de cuerpos que no están en rotación?
4. ¿Significa, obligatoriamente, el equilibrio que el cuerpo está en reposo?
5. Si la suma geométrica de las fuerzas aplicadas al cuerpo es nula, ¿a qué será igual la suma algebraica de las proyecciones de estas fuerzas sobre cierto eje?

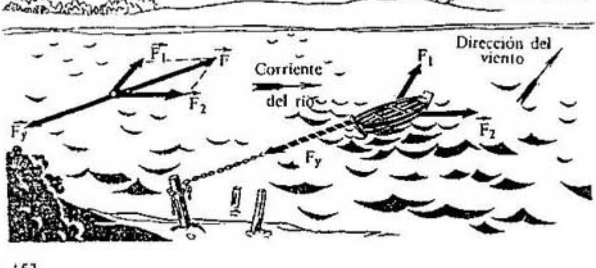


Fig. 153

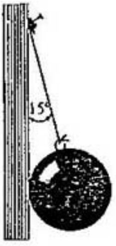


Fig. 154

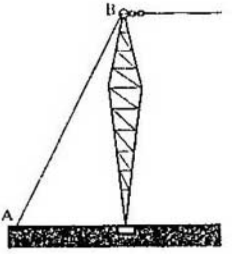


Fig. 155

Ejercicios 26

1. Una carga se desplaza a velocidad constante por una superficie horizontal con ayuda de dos cables a los que se aplican fuerzas de 500 N. Los cables forman entre sí un ángulo de 60°. Determinar la fuerza resultante. ¿Cómo variará el módulo de ésta en función del ángulo entre los cables? Considerar los casos cuando el ángulo es igual a 0, 90, 120, 180°.
2. Una bola de 3 kg de masa está colgada de una cuerda sujeta en una pared lisa (fig. 154). Determinar la fuerza de tensión de la cuerda y de la presión de la bola contra la pared. La cuerda forma un ángulo de 15° y pasa por el centro de masas de la bola.
3. En el centro de un cable de 20 m de largura está suspendida una lámpara, cuya masa es de 3,4 kg, a causa de lo cual el cable se comba 5 cm. Determinar la fuerza elástica que surge en el cable.
4. Sobre un plano inclinado se encuentra un cajón de 30 kg de masa. ¿Resbalará el cajón hacia abajo si el coeficiente de rozamiento entre él y el plano es igual a 0,2? La longitud del plano inclinado es de 6 m, su altura, 2 m.
5. El mástil de una antena (fig. 155) está fijado con el tirante *AB*, que con el primero forma un ángulo de 30°. La fuerza que ejerce la antena sobre el mástil en el punto *B* (tensión de la antena) es igual a 1000 N. ¿A qué será igual la fuerza elástica en el mástil comprimido y la fuerza que actúa sobre el tirante?

7.2. Equilibrio de cuerpos con el eje de rotación fijado

Hemos aclarado en el parágrafo anterior las condiciones de equilibrio de un cuerpo cuando no hay rotación. ¿Pero cómo se asegura la falta de rotación de un cuerpo, es decir, su equilibrio, cuando sobre él actúan fuerzas?

Para dar respuesta a esta pregunta examinemos un cuerpo que no puede realizar movimiento de traslación, pero que tiene la posibilidad de girar o ponerse en rotación. Para hacer imposible el movimiento de traslación del cuerpo, es suficiente fijarlo en un punto de la misma forma que una tabla puede sujetarse en la pared, clavándola con un clavo; el movimiento de traslación de semejante tabla "clavada" resulta imposible, pero ésta tiene la posibilidad de girar en torno del clavo, que le sirve como eje de rotación.

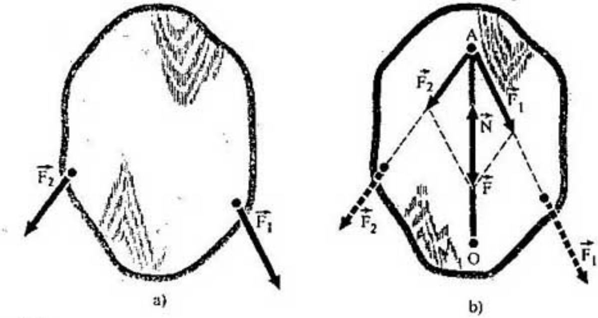


Fig. 156

Aclaremos las condiciones para las cuales un cuerpo con eje fijado no girará bajo la acción de las fuerzas aplicadas hacia él. En la fig. 156, *a* se muestra un cuerpo hacia el cual en diferentes puntos están aplicadas dos fuerzas: $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Para determinar la resultante de éstas, traslademos sus puntos de aplicación al punto *A* (fig. 156, *b*), en el que se cruzan las líneas de acción de las dos fuerzas. Al construir sobre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ el paralelogramo, obtenemos la resultante $\vec{F}$.

Ahora, supongamos que en cierto punto *O* sobre la recta, a lo largo de la cual está dirigida la resultante $\vec{F}$, pasa un eje fijado, perpendicular al plano de la figura. Por ejemplo, nos podemos imaginar que por el punto *O* pasa un clavo que está clavado en la pared inmóvil. En tal caso, el cuerpo estará en reposo, ya que la resultante $\vec{F}$ se equilibra con la fuerza de reacción (elástica) $\vec{N}$ que surge por parte del eje fijado (clavo): las dos están dirigidas a lo largo de una misma recta, son iguales en módulo y de dirección contraria (véase la fig. 156, *b*).

Imaginémonos que la fuerza $\vec{F}_2$ ha dejado de actuar y el cuerpo está sometido sólo a la acción de la fuerza $\vec{F}_1$ (fig. 157, *a*). Como vemos en la figura, esta fuerza obliga al cuerpo a girar alrededor del eje *O* en sentido horario. Si, a la inversa, liquidar la fuerza $\vec{F}_1$, la restante $\vec{F}_2$ provocará la rotación en sentido antihorario (fig. 157, *b*). Esto quiere decir, que cada una de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tiene acción rotativa, con la particularidad de que el sentido de la rotación animada por cada una de ellas es inverso.

MAGNITUD IGUAL PARA LAS FUERZAS $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Tratemos de hallar una magnitud que caracterice la acción rotativa de una fuerza. Hasta ahora sólo sabemos que, durante el equilibrio, dicha magnitud deberá tener iguales valores numéricos para ambas fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, ya que cuando ellas actúan conjuntamente sus acciones rotativas se compensan entre sí y no provocan el giro.

¿Qué magnitud es igual para las dos fuerzas?

Tracemos el eje *X* perpendicular a la dirección de la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (fig. 158). Puesto que

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

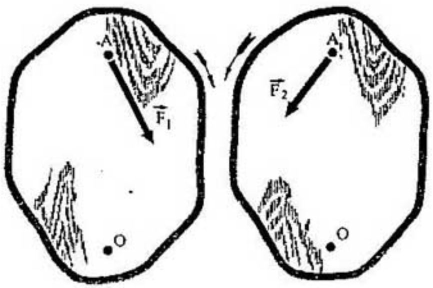


Fig. 157

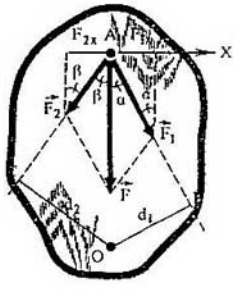


Fig. 158

la proyección de la fuerza $\vec{F}$ sobre el eje X es igual a la suma de las proyecciones de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ sobre ese mismo eje. Pero la proyección de la fuerza $\vec{F}$ es igual a cero, así, que,

$$F_{1x} + F_{2x} = 0,$$

de donde

$$F_{1x} = -F_{2x}.$$

En la fig. 158 vemos que

$$F_{1x} = F_1 \operatorname{sen} \alpha \text{ y } F_{2x} = -F_2 \operatorname{sen} \beta,$$

donde α es el ángulo entre los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}$, mientras que β, el ángulo entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{F}_2$. Así pues,

$$F_1 \operatorname{sen} \alpha = F_2 \operatorname{sen} \beta.$$

De la consideración de los triángulos AOB y AOC se desprende, que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{d_1}{|OA|} \text{ y } \operatorname{sen} \beta = \frac{d_2}{|OA|},$$

donde d_1 es la distancia desde el punto O (eje de rotación) hasta la linea de acción de la fuerza $\vec{F}_1$, mientras que d_2, la distancia desde el punto O hasta la linea de acción de la fuerza $\vec{F}_2$. De forma que

$$F_1 \frac{d_1}{|OA|} = F_2 \frac{d_2}{|OA|},$$

de donde

$$\boxed{F_1 d_1 = F_2 d_2.} \qquad (1)$$

Hemos hallado la magnitud que deberá ser igual para las dos fuerzas con el fin de que el cuerpo esté en equilibrio. Representa el producto del módulo de la fuerza por la distancia entre su línea de acción y el eje de rotación. Esta magnitud caracteriza la acción rotativa de la fuerza. Por lo tanto, la igualdad (1) es la condición de equilibrio de un cuerpo que tiene eje de rotación.

7.3. Momento de rotación. Regla de los momentos

En el parágrafo anterior hemos mostrado que la acción rotativa de una fuerza se caracteriza por el producto del módulo de ésta por la distancia entre el eje de rotación y la línea de acción de la fuerza. La magnitud igual a este producto recibe el nombre de MOMENTO DE ROTACION[1], o bien MOMENTO DE FUERZA CON RELACIÓN AL EJE DE ROTACION.

Si el momento de la fuerza $\vec{F}$ se designa por la letra M, la distancia entre el eje de rotación y la línea de su acción, por la letra d, podemos escribir:

$$\boxed{M = Fd.}$$

La magnitud d también tiene su denominación: recibe el nombre de BRAZO DE LA FUERZA.

Por regla, a los momentos de fuerza que hacen que el cuerpo gire *en sentido horario* se les da *el signo positivo, mientras que en sentido antihorario, el signo negativo*. Entonces, los momentos de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (véase la fig. 156), respecto del eje de rotación, tienen signos opuestos y su suma algebraica es nula.

Un cuerpo, capaz de girar en torno de un eje fijado, estará en equilibrio, si la suma algebraica de los momentos de las fuerzas aplicadas con relación a este eje se anula.

Ésta es justamente la REGLA DE LOS MOMENTOS, o sea, la condición de equilibrio de un cuerpo con eje de rotación fijado.

Para nuestra nueva magnitud, el momento de fuerza, es lógico que podamos hallar la unidad de medición.

De la expresión $M = Fd$ se desprende que *en el SI en calidad de unidad de momento de rotación deberá adoptarse el momento de la fuerza igual a* 1 N, *cuya línea de acción está alejada del eje de rotación a* 1 m. Esta unidad se llama NEWTON-METRO (N·m).

El momento de fuerza depende de dos magnitudes: del valor absoluto de la propia fuerza y de la longitud del brazo. Un mismo momento de fuerza puede ser creado por una fuerza pequeña, cuyo brazo es grande y por una fuerza grande, cuyo brazo es pequeño. Si, por ejemplo, un hombre intenta cerrar la puerta empujándola junto a las bisagras, a esto puede exitosamente contrarrestar un niño que se ingenie en empujarla en dirección opuesta, aplicando la fuerza lo más cerca posible del borde. Entonces, la puerta quedará en reposo (fig. 159).

La regla de los momentos fue obtenida por nosotros para el caso en que sobre el cuerpo actúan dos fuerzas. Se puede mostrar que esta regla es también justa al actuar sobre el cuerpo varias fuerzas.

---

[1] La palabra "momento" en esta denominación tiene origen de la palabra latina "movimentum", es decir, "capacidad de movimiento". No tiene nada que ver con el concepto de "momento de tiempo".

Fig. 159

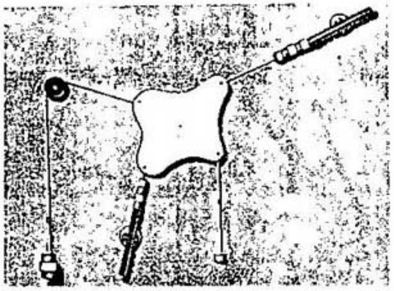


Fig. 160

Aclaremos esto con ayuda de un experimento, realizado con el instrumento representado en la fig. 160. Es un cuerpo de forma irregular fijado en un eje (eje de rotación).

Hacia cuatro puntos de dicho cuerpo están aplicadas fuerzas. El módulo de dos de ellas es igual a los pesos de las correspondientes cargas, mostradas en la fig. 160. Las otras dos son las fuerzas elásticas de los muelles alargados de los dinamómetros, con las que éstos actúan sobre el cuerpo. Los módulos de estas fuerzas se registran en las escalas de los dinamómetros. Bajo el efecto de las cuatro fuerzas, el cuerpo se encuentra en equilibrio. Con un compás y una regla, podemos medir los BRAZOS de las fuerzas indicadas, es decir, la distancia entre el eje de rotación y las rectas a lo largo de las cuales están dirigidas las primeras. Con ello, nos podemos cerciorar de que la suma algebraica de los momentos de las cuatro fuerzas respecto del eje de rotación es igual a cero.

En la fig. 161 se muestra el esquema de ese mismo experimento, en el que sobre el cuerpo actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$. El eje fijo pasa por el punto O. En la figura vemos que los momentos de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, con relación al eje de rotación del cuerpo, son positivos y el momento de la fuerza $\vec{F}_3$, negativo.

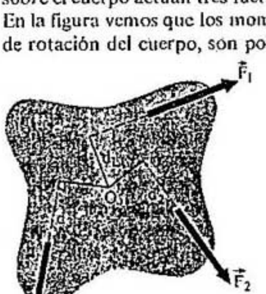


Fig. 161

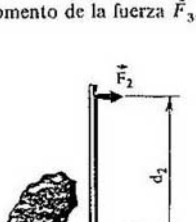


Fig. 162

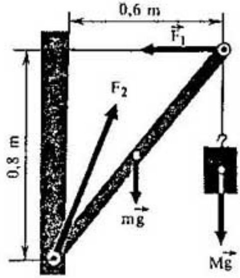


Fig. 163

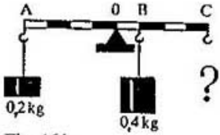


Fig. 164

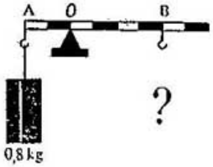


Fig. 165

La condición de equilibrio del cuerpo se escribe en la forma

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3 = 0,$$

donde d_1, d_2 y d_3 son los brazos de las respectivas fuerzas.

Es fácil comprender que de la regla de los momentos se desprende la famosa REGLA DE LA PALANCA, la palanca está en equilibrio, cuando las fuerzas que actúan sobre ella son razón inversa de los brazos. ¡Esto es, ni más ni menos, otra expresión de la regla de los momentos! No hay que pensar que sobre la palanca, obligatoriamente, deben estar aplicadas fuerzas paralelas. Como ejemplo, en la fig. 162 se ofrece una palanca sometida a la acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, perpendiculares entre sí.

Enunciemos la condición general de equilibrio:

Para que un cuerpo esté en equilibrio, es necesario que se anulen la resultante de las fuerzas aplicadas, así como la suma de los momentos de éstas, respecto del eje de rotación[1].

PROBLEMA. Una barra homogénea de masa $m = 2$ kg está fijada mediante su extremo inferior a una articulación (fig. 163). De su otro extremo está colgada la carga de masa $M = 3$ kg. La barra se mantiene en equilibrio con el tirante horizontal, fijado en un montante vertical inmóvil. Haciendo uso de las cifras expuestas en la figura, hallar la fuerza de tensión del tirante.

Solución. Sobre la barra actúan cuatro fuerzas: la de gravedad $m\vec{g}$ aplicada en su centro, la fuerza de gravedad de la carga $M\vec{g}$, la $\vec{F}_1$ elástica del tirante y la fuerza $\vec{F}_2$ elástica en la articulación. La articulación en el extremo inferior de la barra es el eje de rotación. De las fuerzas enumeradas sólo las tres primeras crean momentos de rotación respecto de dicho eje. La línea de acción de la fuerza de rotación en la articulación pasa por el eje de ésta y su momento es nulo. De las tres fuerzas indicadas sólo la fuerza elástica del tirante hace girar la barra en sentido antihorario. Las otras dos, en sentido horario. Según la regla

---

[1] No obstante, el cumplimiento de estas condiciones no impide que el cuerpo realice movimiento rectilíneo de traslación o bien de rotación a velocidad angular constante.

de los momentos

$$20\ \text{N}\cdot 0{,}3\ \text{m} + 30\ \text{N}\cdot 0{,}6\ \text{m} - F_1\cdot 0{,}8\ \text{m} = 0.$$

Después de resolver esta ecuación, obtenemos: $F_1 = 30$ N.

¿ ?

1. ¿Bajo qué condiciones una fuerza aplicada a un cuerpo provoca su giro en torno de un eje fijo?
2. ¿Qué es el brazo de una fuerza?
3. ¿Qué es el momento de una fuerza?
4. ¿En qué consiste la condición de equilibrio de un cuerpo, que puede girar en torno de un eje fijo?
5. ¿Con qué condición la palanca mostrada en la fig. 162 se encuentra en equilibrio?

Ejercicios 27

1. En la fig. 164 viene representada una barra homogénea, cuyo eje de rotación se encuentra en el punto O. En los puntos A y B de la barra están colgadas las cargas de masas 0,2 y 0,4 kg, respectivamente. ¿Cuál debe ser la masa de la carga que se cuelga del punto C para que la barra permanezca en equilibrio?
2. Hacia una barra homogénea, que puede girar alrededor de un eje, está fijada en el punto A una carga de masa 0,8 kg (fig. 165). ¿Cuál debe ser la masa de la carga que hay que fijar en el punto B, para que la barra quede en equilibrio, si la masa de ésta es de 400 g?

Tareas

1. Presentar ejemplos del empleo práctico de la palanca.
2. Mostrar que la regla de la palanca se deduce de la regla de los momentos.

7.4. Estabilidad de equilibrio de los cuerpos

Si el cuerpo se encuentra en equilibrio, esto significa que la suma de las fuerzas aplicadas hacia él es nula, lo mismo que la suma de los momentos de dichas fuerzas respecto del eje de rotación. Pero surge la pregunta: ¿será estable ese equilibrio?

Por ejemplo, de inmediato percibimos que la posición de equilibrio de la bola en el vértice de un soporte convexo (fig. 166) es inestable: el mínimo desplazamiento de la bola respecto de su posición de equilibrio obligará a aquélla a rodar hacia abajo. Pero ahora examinemos a esa misma bola ubicada en un soporte cóncavo (fig. 167). Es muy difícil obligarla a que abandone su lugar. El equilibrio de esta bola puede considerarse estable.

¿EN QUÉ CONSISTE EL SECRETO DE LA ESTABILIDAD? En los casos que hemos examinado la bola se encuentra en equilibrio: la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ es igual en módulo y opuesta en dirección a la fuerza elástica (fuerza de reacción) $\vec{N}$ por parte del apoyo (figs. 168 y 169).

Todo radica, justamente, en ese mínimo desplazamiento que hemos mencionado. En caso de dicho desplazamiento, que siempre ocurre con motivo de sacudidas casuales: corrientes de aire y otras causas, el equilibrio de la bola se perturba. En la fig. 168 vemos que, tan pronto la bola en el soporte convexo

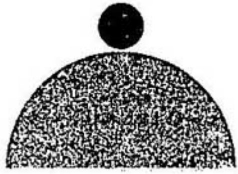


Fig. 166

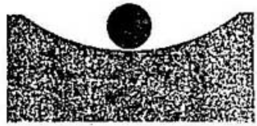


Fig. 167

abandona su puesto, la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ deja de compensarse con la fuerza $\vec{N}$ por parte del apoyo (la fuerza $\vec{N}$ siempre está dirigida de forma perpendicular a la superficie de contacto entre la bola y el soporte). La resultante de la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ y la fuerza de reacción $\vec{N}$ del apoyo, es decir, la fuerza $\vec{F}$ está dirigida de tal forma que la bola se aleja más aún de la posición de equilibrio.

Un cuadro diferente por completo observamos en el soporte cóncavo (fig. 169). Con un pequeño desplazamiento de la posición inicial, aquí también se altera el equilibrio. La fuerza elástica por parte del apoyo tampoco equilibrará aquí la fuerza de gravedad. Pero en este caso la resultante $\vec{F}$ está dirigida de modo que el cuerpo retorna a su posición anterior. En esto consiste la condición de estabilidad de equilibrio.

El equilibrio de un cuerpo es estable si, al apartarlo un poco de la posición de equilibrio, la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo hace que éste retorne a la posición de equilibrio.

El equilibrio es inestable si, al desplazarlo un poco de la posición de equilibrio, la resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo hace que éste se aleje de dicha posición.

Esto es también válido para los cuerpos que tienen eje de rotación. Como cuerpo de semejante tipo, examinemos una regla común y corriente, fijada en un espárrago, que pasa por el orificio junto al extremo de la regla (fig. 170, *a*, *b*). De estas figuras se infiere que la posición de la regla mostrada en la fig. 170, *a* es estable. Suspender esa misma regla en el espárrago como viene mostrado en la fig. 171, *a* resulta imposible. Al desplazar un poco la regla de la posición vertical (fig. 171, *b*), la misma girará hasta ocupar la posición mostrada en la fig. 171, *c*. Es decir, el equilibrio de la regla que corresponde a la fig. 171, *a* es inestable.

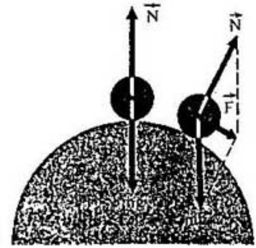


Fig. 168

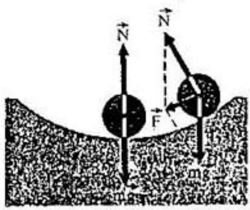


Fig. 169

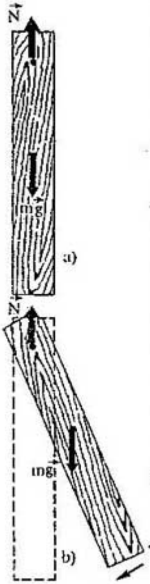


Fig. 170

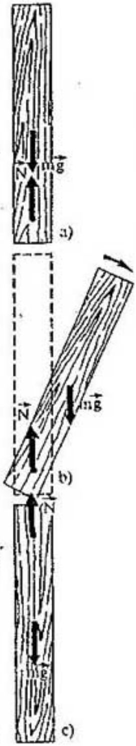


Fig. 171

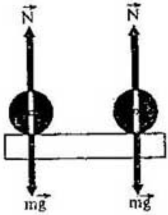


Fig. 172

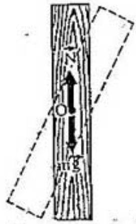


Fig. 173

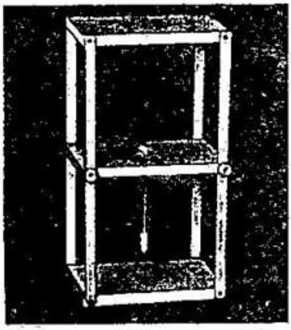


Fig. 174

Las posiciones de equilibrio estable e inestable difieren entre sí además por la posición del centro de gravedad del cuerpo. Cuando la bola se encuentra en la posición de equilibrio inestable (véase la fig. 166), su centro de gravedad está por encima de éste en cualquier otra posición vecina. Y viceversa, en la bola situada en el soporte cóncavo, el centro de gravedad en la posición de equilibrio estable (véase la fig. 167) está por debajo de dicho centro en cualquier otra posición vecina. Esto quiere decir, que *para el equilibrio estable el centro de gravedad del cuerpo debe encontrarse en la posición más baja de todas las posibles.*

En lo que atañe a un cuerpo que tiene eje de rotación, su equilibrio es estable a condición de que su centro de gravedad esté por debajo del eje de rotación.

También es posible tal posición de equilibrio, cuando el desplazamiento de ésta no conduce a variaciones del estado del cuerpo. Así es, por ejemplo, la posición de la bola en un apoyo plano (fig. 172) o de la regla suspendida de un

12—948

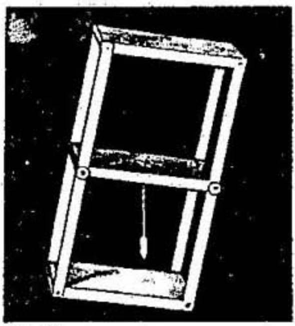


Fig. 175

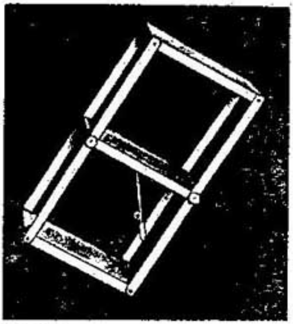


Fig. 176

espárrago que pasa por el orificio practicado en su centro de gravedad (fig. 173). Está claro, que con cualquier variación de la posición del cuerpo, ésta seguirá siendo de equilibrio. Semejante equilibrio recibe el nombre de INDIFERENTE.

EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS SOBRE LOS APOYOS. Acabamos de examinar la condición de estabilidad e inestabilidad de los cuerpos con un punto o un eje de apoyo. Es de la misma importancia el caso, cuando el apoyo no es un punto (eje), sino cierta área. Tienen área de apoyo un cajón en el suelo, un vaso sobre la mesa, toda clase de edificios, las chimeneas de las fábricas, etc. ¿Cuáles son en este caso las condiciones de equilibrio estable de los cuerpos?

Sobre los cuerpos, que tienen área de apoyo, actúan y se equilibran entre sí, lo mismo que en los casos anteriores, la fuerza de gravedad, que podemos considerarla como aplicada al centro de gravedad, y la fuerza elástica (reacción) por parte del apoyo, que es perpendicular a su superficie. Lo mismo que en los casos estudiados más arriba, el equilibrio será estable, si al desplazarse de la posición de equilibrio no surge una fuerza que aleje el cuerpo de dicha posición. Por ejemplo, cuando un prisma se encuentra sobre una superficie horizontal (fig. 174), éste se encuentra en equilibrio. Semejante equilibrio es estable, ya que, al inclinarlo un pequeño ángulo, la linea de acción de la fuerza de gravedad (que coincide con la línea de la plomada) cruza la base del prisma a la izquierda de los puntos de apoyo (fig. 175) y la fuerza de gravedad retorna el prisma a su posición anterior.

Pero si aumentamos la inclinación del prisma (fig. 176), el resultado será otro. La linea de acción de la fuerza de gravedad (la linea de la plomada) cruza ahora la base del prisma a la derecha de los puntos de apoyo y, bajo la acción de dicha fuerza, el prisma se inclinará aún más. Al fin y al cabo, éste se caerá.

La fig. 177 corresponde a la posición límite del prisma cuando él todavía no se cae. En este caso, la línea de acción de la fuerza de gravedad cruza la línea, a lo largo de la cual se encuentran los puntos de apoyo del prisma.

Así pues, para la estabilidad del cuerpo, es preciso que la vertical trazada por su centro de gravedad caiga dentro del área de apoyo.

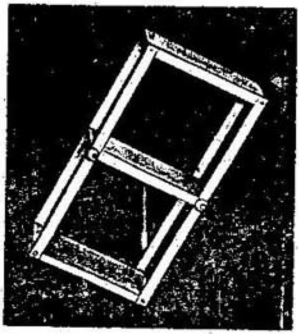


Fig. 177

Fig. 178

Esta área, de la que depende el equilibrio, no es siempre el área con la que el cuerpo hace en realidad contacto con el apoyo. Por ejemplo, la mesa hace contacto con el suelo sólo en aquellos lugares donde se encuentran sus patas. Pero el área de apoyo de la mesa es la que abarca la superficie dentro del contorno que obtenemos al unir con rectas todas las patas de la mesa. El área del trípode (fig. 178), es la del triángulo formado por las rectas que unen los extremos del primero, etc.

¿ ?

1. Indicar los tipos de equilibrio para los siguientes casos: a) un gimnasta hace el puntal en las paralelas; un gimnasta está colgado de las anillas; b) un volatinero se encuentra sobre el cable; c) una rueda está asentada en el eje; d) una bola está suspendida de un hilo; e) una bola está sobre la mesa.
2. ¿De qué modo se asegura buena estabilidad de los siguientes objetos: a) un soporte de laboratorio; b) una grúa de torre; c) una lámpara de mesa?
3. Un camión transporta mercancías del mismo peso: en el primer caso son chapas de acero; en el segundo, algodón y en el tercero, leña. ¿En qué caso el camión es más estable?

Lo más importante en el séptimo capítulo

El problema del equilibrio del cuerpo, sobre el que actúan fuerzas, es importante para el cálculo de obras que deben encontrarse permanentemente en reposo.

Para el equilibrio del cuerpo es preciso que se cumplan dos condiciones:

1) la SUMA GEOMÉTRICA de las fuerzas aplicadas al cuerpo debe ser igual a cero;

2) la SUMA ALGEBRAICA de los momentos de las fuerzas aplicadas debe ser igual a cero.

El momento de fuerza respecto de cualquier eje es una magnitud que caracteriza la acción rotativa de la fuerza alrededor de ese eje. Es igual al producto del módulo de la fuerza por su brazo.

No todo equilibrio del cuerpo es realizable en la práctica. Sólo pueden ser obtenidos el equilibrio estable o bien el indiferente.

El equilibrio del cuerpo es estable cuando, para un pequeño desplazamiento de éste respecto de la posición de equilibrio, las fuerzas que sobre él actúan lo hacen retornar a la posición inicial.

Principios de conservación en mecánica

8

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (IMPULSO)

MAGNITUDES FÍSICAS QUE SE CONSERVAN

En los anteriores capítulos vimos cómo las leyes de Newton permiten resolver el problema de movimiento de los cuerpos. Por esta causa se puede crear la impresión de que aquí podríamos acabar el estudio de la mecánica. Pero en muchos casos es muy difícil hallar el valor de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Al examinar el choque de dos cuerpos, por ejemplo, dos vagones, sabemos que ellos actúan recíprocamente mediante la fuerza elástica. Sin embargo, determinar el valor de ésta suele ser difícil y a veces imposible, ya que las deformaciones de las partes de los vagones que entran en contacto son de complicado carácter. Incluso en el caso tan sencillo como lo es el choque de dos bolas, la deformación de cada una de ellas tiene un complicado aspecto y no está claro cuáles son los valores de las magnitudes x y k en la fórmula de la ley de Hooke:

$$(F_{\text{elást}})_x = -kx.$$

En estos casos, para resolver el problema de mecánica, se emplean sencillos corolarios de las leyes de movimiento, que son modificaciones de la segunda ley de Newton. Pero en tales casos aparecen nuevas magnitudes en lugar de las fuerzas y las aceleraciones. Estas magnitudes son la CANTIDAD DE MOVIMIENTO (IMPULSO) y la ENERGÍA. Sobre ellas trataremos en este apartado. La cantidad de movimiento y la energía son magnitudes singulares, pues tienen la propiedad de conservación. Tanto las propias magnitudes, como su mencionada propiedad desempeñan un importante papel no sólo en mecánica, sino que también en otras partes de física. En esto consiste su importancia.

8.1. Fuerza y cantidad de movimiento

La fórmula

$$\vec{F} = m\vec{a}, \qquad (1)$$

que expresa la segunda ley de Newton, puede ser escrita de otra forma, si recordamos que la aceleración es igual a la rapidez de variación de la velocidad del cuerpo. En particular, para el movimiento uniformemente variado

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \tag{2}$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (1), obtenemos:

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{t},$$

o bien

$$\vec{F} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{t}. \tag{3}$$

La expresión (3) puede ser anotada en la forma siguiente:

$$\boxed{\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0} \tag{4}$$

El segundo miembro de esta igualdad es la variación del producto de la masa del cuerpo por su velocidad. El producto de la masa del cuerpo por la velocidad es una magnitud física que tiene una denominación especial. Recibe el nombre de CANTIDAD DE MOVIMIENTO O IMPULSO DEL CUERPO.

Llamamos cantidad de movimiento de un cuerpo al producto de la masa de éste por su velocidad.

La cantidad de movimiento del cuerpo es una magnitud vectorial, cuya dirección coincide con la del vector de velocidad.

Se suele decir que un cuerpo de masa m en movimiento a una velocidad $\vec{v}$ es portador de una cantidad de movimiento $m\vec{v}$ (o que tiene una cantidad de movimiento $m\vec{v}$).

Es evidente, que en el SI se toma *por unidad de cantidad de movimiento la correspondiente a un cuerpo de* 1 kg *de masa que se mueve a una velocidad de* 1 m/s. La unidad de cantidad de movimiento es el KILOGRAMO-METRO POR SEGUNDO (kg·m/s).

Como se infiere de la fórmula (4), la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual al producto de la fuerza $\vec{F}$ por el tiempo t durante el que ella actúa. La magnitud $\vec{F}t$ también tiene una denominación especial, recibe el nombre de IMPULSO DE LA FUERZA.

La variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual al impulso de la fuerza.

Al deducir la fórmula (4) supusimos que la aceleración de un cuerpo y, por lo tanto, la fuerza que sobre él actuaba eran constantes. Si la fuerza varía con el tiempo, el intervalo de éste durante el que la fuerza actúa puede ser dividido en pequeños intervalos, en el transcurso de los cuales se puede considerar que la fuerza es constante. Para determinar la variación de la cantidad de movimiento, en cada uno de dichos intervalos de tiempo, se puede utilizar la fórmula (4). Después de sumar las variaciones de la cantidad de movimiento del cuerpo obtenidas, tendremos la variación de la cantidad de movimiento para todo el intervalo de tiempo durante el que actúa la fuerza.

Si el tiempo de acción de la fuerza es muy pequeño, por ejemplo, en caso de un choque o golpe, es posible hacer uso directo de la fórmula (4), tomando $\hat{F}$ como la fuerza media que sobre el cuerpo actúa.

La cantidad de movimiento es notable por el hecho de que varía de igual modo, bajo el efecto de la fuerza dada, en todos los cuerpos, si el tiempo de acción de la fuerza es el mismo. Una misma fuerza, que actúa durante un determinado tiempo, añadirá igual cantidad de movimiento, tanto a una barcaza cargada, como a una canoa.

Pero retornemos a la expresión (3). La razón

$$\frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{t}$$

es la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo en la unidad de tiempo. Así pues, la fuerza no sólo se caracteriza por el producto de la masa del cuerpo por su aceleración. Como ahora vemos, *la fuerza es una magnitud igual a la razón entre la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo y el intervalo de tiempo durante el que se produjo dicha variación.*

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es igual a la variación de su cantidad de movimiento en la unidad de tiempo, es decir, a la rapidez con que varía el impulso.

¿ ?

1. ¿Qué es la cantidad de movimiento? ¿A qué es igual el módulo de la cantidad de movimiento de un cuerpo? ¿Cómo está dirigido el vector de la cantidad de movimiento de un cuerpo?
2. ¿Qué ligazón existe entre la fuerza aplicada al cuerpo y su cantidad de movimiento? ¿Podemos decir que el cuerpo tiene cantidad de movimiento porque sobre él actúa una fuerza?
3. ¿Qué es el impulso de la fuerza? ¿A qué es igual su módulo y cómo está dirigido?
4. ¿Qué relación existe entre el impulso de la fuerza y la cantidad de movimiento del cuerpo?
5. ¿En qué unidades se mide el impulso de la fuerza y la cantidad de movimiento del cuerpo? ¿Son estas unidades diferentes?

Ejercicios 28

1. Hallar la cantidad de movimiento de un cuerpo de 5 kg de masa que está en movimiento a una velocidad de 2 m/s.
2. En la cisterna de un camión regador de 4 t de masa hay 2 m^3 de agua. ¿A qué es igual la cantidad de movimiento del camión: a) cuando se mueve a una velocidad de 18 km/h hacia el lugar de regadío; b) cuando el camión se mueve a una velocidad de 54 km/h después de gastar todo el agua?
3. Una bola metálica de 20 g de masa que cae a una velocidad de 5 m/s, choca elásticamente contra una plancha de acero y bota sobre ésta en dirección contraria a una velocidad igual en módulo. Determinar la variación de la cantidad de movimiento de la bola y la fuerza media que provocó dicho cambio, si el choque duró 0,1 s.
4. Un chófer desconectó el motor de un automóvil cuando éste iba a una velocidad de 72 km/h. Después de 3,4 s, el auto se paró.

La fuerza de rozamiento de las ruedas con el asfalto es igual a 5880 N. ¿A qué era igual la cantidad de movimiento del automóvil en el momento de parar el motor? ¿Cuál es la masa del automóvil?

5. Un automóvil de 2 t de masa se mueve a una velocidad de 36 km/h. ¿Cuánto tiempo hará falta para la parada total del automóvil después de desconectar el motor, si la fuerza de rozamiento entre las ruedas y la carretera es igual a 5880 N?

Tarea

Analizar la solución de los problemas 4 y 5 de los ejercicios 28 y aclarar de qué magnitud depende el tiempo de frenado de un cuerpo en movimiento, para el valor prefijado del módulo de la fuerza de frenado. Comparar el resultado del análisis con la fórmula aducida en 6.7.

8.2. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

A la cantidad de movimiento le es inherente una importante e interesante propiedad, que poseen muy pocas magnitudes físicas. Ésta es la PROPIEDAD DE CONSERVACIÓN. Consiste en que la suma geométrica de las cantidades de movimiento de los cuerpos en interacción se conserva invariable. Claro está, que las cantidades de movimiento de los cuerpos varían, ya que sobre cada cuerpo actúan las fuerzas de interacción, pero la suma de las cantidades de movimiento queda constante. Esta afirmación recibe el nombre de principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Este principio es una de las más importantes leyes de la naturaleza. Dicho principio se demuestra con suma facilidad cuando en interacción se encuentran dos cuerpos. En efecto, en semejante caso, si el primer cuerpo actúa sobre el segundo con una fuerza $\vec{F}$, sobre el primer cuerpo actuará el segundo con una fuerza, que según la tercera ley de Newton, es igual a $-\vec{F}$. Designemos las masas de los cuerpos por m_1 y m_2 y sus velocidades respecto de cierto sistema de referencia, por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Como resultado de la interacción de los cuerpos, sus velocidades variarán y después de un intervalo de tiempo t serán iguales a $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$.

De acuerdo con la fórmula (4) del parágrafo anterior

$$\vec{F}t = m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1,$$
$$-\vec{F}t = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2.$$

Por consiguiente,

$$m_1\vec{v}_1' - m\vec{v}_1 = -(m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2).$$

Cambiando los signos en los dos miembros de esta igualdad por los contrarios, la escribimos del modo siguiente:

$$\boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'.}$$

En el primer miembro de esta igualdad viene la suma de las cantidades iniciales de movimiento de los dos cuerpos, mientras que en el segundo, la suma de las

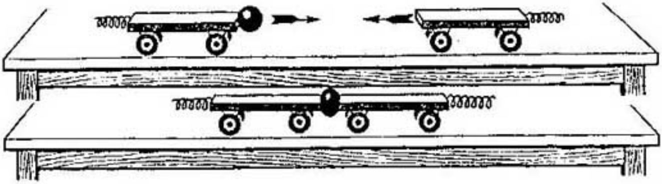


Fig. 179

cantidades de movimiento después del intervalo de tiempo t. Estas sumas son iguales. De forma que, aunque la cantidad de movimiento de cada uno de los cuerpos varía durante la interacción, su cantidad de movimiento total, es decir, la suma de las cantidades de movimiento de los dos cuerpos se conserva invariable. Lo que queríamos demostrar.

¿CUÁNDO ES VÁLIDO EL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO? Es posible demostrar y la práctica también lo confirma, que si en interacción están no dos, sino que muchos cuerpos, la suma geométrica de las cantidades de movimiento de todos ellos o, como suele decirse, la de un sistema de cuerpos, queda invariable. Sólo es de importancia que estos cuerpos estén en interacción solamente entre sí, que sobre ellos no actúen fuerzas por parte de otros cuerpos que no figuran en el sistema (o bien que las fuerzas exteriores se equilibren). Ese grupo de cuerpos libre de influencias exteriores por parte de cualesquiera otros cuerpos que no figuran en dicho grupo, recibe el nombre de SISTEMA CERRADO. Cuando más arriba hablábamos de dos cuerpos en interacción, también teníamos en cuenta que cuerpos ajenos no actuaban sobre ellos. Precisamente, para los sistemas cerrados es justo el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

La suma geométrica de las cantidades de movimiento de los cuerpos, que forman un sistema cerrado, queda constante para toda clase de interacciones de los cuerpos de este sistema entre sí.

De aquí se desprende que la interacción de los cuerpos se reduce a que unos de ellos transmiten parte de su cantidad de movimiento a otros.

La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial. Por esta razón, si la suma de las cantidades de movimiento de los cuerpos queda constante, también la suma de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas permanece invariable. Por este motivo, la suma geométrica de los impulsos puede ser sustituida por la suma algebraica de sus proyecciones.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento puede ser mostrado en los siguientes experimentos sencillos.

1. Pongamos sobre los rieles dos carretillas de igual masa m. En la cara de una de ellas fijemos una bola de barro plástico. Sea que las carretillas se mueven al encuentro a velocidades $\vec{v}$ de igual módulo (fig. 179). Al chocar ambas carretillas se pararán. Explicar los resultados del experimento es fácil. Antes de chocar, la cantidad de movimiento de la carretilla izquierda era igual a $m\vec{v}$, mientras que la de la derecha,$-m\vec{v}$ (las carretillas se movían en direcciones

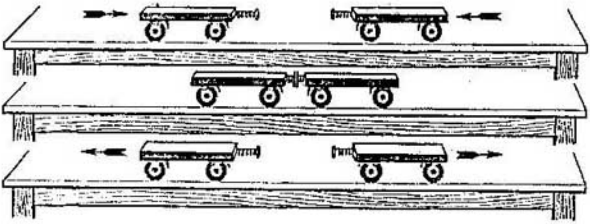


Fig. 180

contrarias). Por lo tanto, antes de chocar, la cantidad total de movimiento de las carretillas era nula:

$$m\vec{v} + (-m\vec{v}) = 0.$$

Después de chocar los vehículos se pararon. Por lo tanto, la cantidad sumaria de movimiento de las carretillas también es nula.

2. Podemos dar vuelta a las carretillas de forma que queden dirigidas mutuamente con los topes de resorte (fig. 180). Entonces, repitiendo el experimento, nos cercioraremos de que, después de chocar las carretillas, se separarán en direcciones opuestas. En caso de semejante interacción, las velocidades de las carretillas cambian sus direcciones por las contrarias, mientras que los módulos de las velocidades mantienen los mismos valores que antes de la interacción. Si antes del encuentro la cantidad de movimiento de la carretilla izquierda era igual a $m\vec{v}$ y la de la derecha, $-m\vec{v}$, después del choque, esa magnitud de la carretilla izquierda será $-m\vec{v}$ y la de la derecha, $m\vec{v}$. Por esta razón, la cantidad sumaria de movimiento de las dos carretillas es igual a cero tanto antes, como después del choque, de acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

PROBLEMA. Un vagón de ferrocarril de 30 000 kg de masa, en movimiento a una velocidad de 1,5 m/s, se engancha con un vagón inmóvil, cuya masa es igual a 20 000 kg. ¿Cuál será la velocidad después del enganche? (Los vagones se encuentran en un sector rectilíneo de la vía.)

Solución. Dirijamos el eje de coordenadas a lo largo de la vía férrea en dirección del movimiento del primer vagón. Designemos la masa de éste (el que se mueve) por m_1, la del segundo vagón (el inmóvil), por m_2, la velocidad del primer vagón antes del enganche por $\vec{v}_1$ y la velocidad común de los dos vagones después del enganche por $\vec{v}$. Según el principio de conservación de la cantidad de movimiento, esta magnitud para los dos vagones en conjunto, antes y después del enganche, debe ser igual.

Antes del enganche, la proyección de la cantidad total de movimiento sobre el eje de coordenadas es positiva e igual al módulo del vector de la cantidad de movimiento del primer vagón, es decir, a m_1v_1. Después del enganche, la proyección de la cantidad total de movimiento, deberá seguir siendo positiva e igual al módulo del vector de la cantidad total de movimiento, o sea, $(m_1 +$

$+m_2)v$. Por consiguiente,

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v.$$

De aquí

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1; \quad v = \frac{3 \cdot 10^4\ \text{kg} \cdot 1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \cdot 10^4\ \text{kg}} = 0{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

En el problema no conocíamos los valores de las fuerzas de interacción entre los vagones. Pero, haciendo uso del principio de conservación de la cantidad de movimiento, hemos hallado las velocidades de los cuerpos que nos interesaban. Está claro, que si son conocidas las posiciones iniciales de los cuerpos, sabiendo sus velocidades, es posible determinar la posición de ellos en cualquier momento de tiempo. He aquí el porqué el principio de conservación de la cantidad de movimiento tiene gran importancia.

¿ ?

1. ¿En qué consiste el principio de conservación de la cantidad de movimiento?
2. ¿Qué es un sistema cerrado de cuerpos?
3. Un velero entró en una zona de calma y se paró. ¿Será posible ponerlo en movimiento hinchando las velas con ayuda de una bomba o de un fuelle instalado a bordo de él?
4. De un carro de combate en movimiento se dispara el cañón. ¿Influirá el cañonazo sobre la velocidad del tanque? ¿Qué cuerpos forman en este caso el sistema cerrado?
5. Dos bolas de igual masa ruedan al encuentro a velocidades de un mismo módulo por una superficie muy lisa (por esto, ambas bolas forman un sistema cerrado). Las bolas chocan, después de lo cual se mueven en direcciones opuestas, con las mismas velocidades en cuanto al módulo. ¿A qué es igual su cantidad total de movimiento antes del choque, en el instante de éste y después de él?
6. Puede la metralla de una granada estallada volar en la misma dirección si antes de la explosión ella estaba en reposo? ¿Y en caso de estar en movimiento?

Ejercicios 29

1. Un hombre de 70 kg de masa, que corre a una velocidad de 7 m/s, alcanza un carro de 30 kg de masa que se desplaza a una velocidad de 2 m/s y salta sobre él. ¿A qué velocidad se moverá el carro después de esto?
2. Durante la formación de un tren, tres vagones enganchados, en movimiento a una velocidad de 0,4 m/s, chocan con un vagón inmóvil, después de lo cual todos los vagones continúan moviéndose conservando la dirección y a una misma velocidad. Determinar esta velocidad si las masas de todos los vagones son iguales.
3. Un proyectil antiaéreo disparado en dirección vertical, al alcanzar la altura máxima, estalla. Con ello se han formado tres fragmentos. Dos de ellos vuelan formando un ángulo recto entre sí, con la particularidad de que la velocidad del primer fragmento de 9 kg de masa es igual a 60 m/s, mientras que la del segundo de 18 kg de masa, a 40 m/s. El tercer fragmento vuela a una velocidad de 200 m/s. Por vía gráfica determinar la dirección de vuelo del tercer fragmento. ¿Cuál es su masa?

8.3. Propulsión a chorro o por reacción

Un importante e interesante caso de la utilización práctica del principio de conservación de la cantidad de movimiento es la PROPULSIÓN A CHORRO O POR REACCIÓN. Así se denomina el procedimiento empleado para que un cuerpo avance en el espacio por efecto de expulsar a determinada velocidad cierta parte del mismo.

Este tipo de propulsión se ha realizado, por ejemplo, en los COHETES. Todo cohete es un sistema de dos cuerpos: uno es la cubierta y el otro, el combustible que ella contiene. La cubierta tiene la forma de un tubo, uno de cuyos extremos está cerrado, mientras que el otro, está abierto y equipado de una boquilla tubular con orificio de forma singular, llamada tobera reactiva.

Para poner el cohete en marcha, el combustible se quema y se convierte en un gas con alta presión y temperatura. Gracias a la alta presión, dicho gas sale a gran velocidad de la tobera del cohete. Con ello, la cubierta de éste se lanza en la dirección opuesta (fig. 181).

Antes del lanzamiento del cohete, su cantidad de movimiento total (de la cubierta y el gas), en el sistema de coordenadas ligado con la Tierra, es igual a cero, ya que todo el cohete está en reposo respecto de nuestro planeta. Como resultado de la interacción entre el gas y la cubierta, el gas que se expulsa adquiere cierta cantidad de movimiento. Vamos a considerar que la influencia de la fuerza de gravedad es despreciablemente pequeña, entonces, la cubierta y el combustible pueden ser considerados como un sistema cerrado y su cantidad total de movimiento debe quedar nula también después del lanzamiento. Por esta causa, al ponerse en interacción con el gas, la cubierta adquiere cierta cantidad de movimiento, cuyo módulo es igual al de la cantidad de movimiento del gas, pero de dirección contraria. Es por eso por lo que se pone en movimiento no sólo el gas, sino que también la cubierta del cohete. En ella pueden ser ubicados instrumentos científicos para efectuar investigaciones, toda

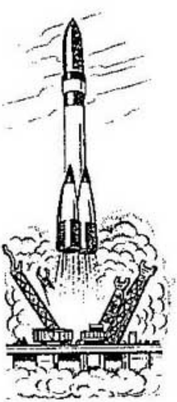


Fig. 181

Konstantín Eduárdovich Tsiolkovski (1857–1935). Científico e inventor ruso, fundador de la cosmonáutica. En los años 80 del siglo pasado investigó los problemas de construcción de dirigibles, aviones, cohetes y propuso la idea del empleo de los cohetes para los vuelos al espacio. Fue precisamente en este ámbito donde Tsiolkovski obtuvo los más importantes resultados. Las ideas que propuso en lo que atañe a los cohetes, motores para éstos, vuelos espaciales, influyeron en alto grado sobre el desarrollo de la técnica de cohetes y cósmica en la URSS y en otros países.

clase de medios de comunicación, etc. Con el cohete puede estar también ligada una nave cósmica, en la que se encuentran los cosmonautas.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento permite definir la velocidad del cohete (de la cubierta).

En efecto, para empezar, supongamos que todo el gas que se forma al quemar el combustible, se expulsa del cohete de golpe y no fluye gradualmente.

Designemos por m_{gas} toda la masa del gas, en que se convierte el combustible del cohete, mientras que la velocidad del gas que sale por $\vec{v}_{gas}$. La masa y la velocidad de la cubierta serán designadas por m_{cub} y $\vec{v}_{cub}$. De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, la suma de los impulsos de la cubierta y del gas después del lanzamiento debe ser la misma que antes de lanzar el cohete, es decir, igual a cero. Así, pues,

$$m_{gas}(v_{gas})_y + m_{cub}(v_{cub})_y = 0,$$

o bien

$$m_{cub}v_{cub} = m_{gas}v_{gas}$$

(el eje de coordenadas Y se ha elegido en la dirección de movimiento de la cubierta). De aquí hallamos la velocidad de la cubierta:

$$v_{cub} = \frac{m_{gas}}{m_{cub}} v_{gas}. \qquad (1)$$

De esta fórmula se deduce que la velocidad de la cubierta del cohete, será tanto mayor, cuanto mayores sean la velocidad del gas que se expulsa y la razón entre las masas del gas y de la cubierta. Por esta causa, la cubierta recibirá una velocidad suficientemente grande en caso de que la masa del combustible sea mucho más grande que la de la cubierta. Por ejemplo, para que la velocidad de la cubierta tenga un valor absoluto 4 veces mayor que la velocidad de expulsión

Serguéi Pávlovich Koroliov (1907–1966).

del gas, la masa del combustible deberá ser esa misma cantidad de veces mayor que la masa de la cubierta, o sea, ésta constituirá una quinta parte de toda la masa del cohete antes del lanzamiento. Pero hay que tener en cuenta que la cubierta es, precisamente, la parte "útil" del cohete.

Hemos considerado que todo el gas se expulsa del cohete de golpe. En la realidad, aquél fluye no de golpe, aunque lo hace con suficiente rapidez. Esto significa que, a medida que el combustible se consume y aumenta la velocidad del cohete, la velocidad del gas que fluye, con relación a la Tierra, decrece. También se reduce la cantidad de movimiento que el cohete adquiere al expulsar el gas. Por este motivo, la velocidad v_{cub} del cohete resulta menor que la calculada aplicando la fórmula (1).

Este hecho hace que aumente considerablemente la masa del combustible necesaria para alcanzar la velocidad dada. El cálculo muestra que para que la velocidad de la cubierta sea 4 veces mayor que la del gas, la masa del combustible antes del lanzamiento debe ser no 4, sino que varias decenas de veces mayor que la masa de la cubierta. Además, si se toma en consideración que, al lanzar el cohete desde la Tierra, sobre él actúan la fuerza de resistencia del aire, a través del cual el cohete debe pasar, y la atracción de la Tierra, ha de llegarse a la conclusión de que dicha relación debe ser aún más grande.

A diferencia de todos los demás medios de transporte, el cohete puede desplazarse sin entrar en interacción con ningún otro cuerpo, salvo con los productos de la combustión del propelente que en el mismo se encuentra.

Ésta es, justamente, la causa por la que los cohetes se utilizan para lanzar satélites artificiales de la Tierra y naves cósmicas, así como para el desplazamiento de éstas en el espacio cósmico. Allí nada existe sobre lo que se puede hallar apoyo o bien repelerse, como lo hacen los medios terrestres de transporte.

En caso de necesidad, el cohete puede ser frenado. Así obran los

Yuri Alexéyevich Gagarin
(1934-1968).

cosmonautas, cuando después de acabar el vuelo espacial deben reducir la velocidad de su nave para retornar a la Tierra. Está claro, que el cohete disminuirá su velocidad si el gas que sale de su tobera, fluye en la misma dirección en que se mueve el artefacto.

La idea de emplear los cohetes para los vuelos cósmicos fue propuesta a comienzos de nuestro siglo por el famoso científico ruso K. E. TSIOLKOVSKI. Esta idea fue realizada por los científicos e ingenieros soviéticos, bajo la dirección del eminente científico SERGUEI PÁVLOVICH KOROLIOV. Muchos centenares de satélites artificiales de la Tierra y naves cósmicas se ponen en órbita en el espacio cósmico con ayuda de cohetes. Gracias al empleo de los cohetes, el hombre ha visitado la Luna. Con ayuda de cohetes se han llevado a la Luna laboratorios cósmicos y creado satélites artificiales de ella.

El primer satélite artificial de la Tierra en la historia fue lanzado en la Unión Soviética con un cohete el 4 de octubre de 1957.

El ciudadano de la Unión Soviética YURI GAGARIN fue el primer hombre que, en un satélite artificial, realizó un vuelo al espacio cósmico. El 12 de abril de 1961 dio una vuelta al globo terrestre en la nave-satélite "Vostok".

Los cohetes soviéticos fueron los primeros en alcanzar la Luna, en volar a su alrededor y fotografiar su parte "posterior", invisible, los primeros que llegaron al planeta Venus. La URSS ocupa puesto de vanguardia en la investigación del espacio cósmico.

¿ ?

1. Como sabemos, un cohete puede recibir aceleración en el espacio cósmico, donde a su alrededor no hay ningún cuerpo. Pero para la aceleración hace falta una fuerza y ésta es la acción de un cuerpo sobre otro. ¿Por qué se aceleran los cohetes?
2. ¿De qué depende la velocidad de un cohete?
3. ¿Cómo se realiza el frenado de una nave cósmica?
4. ¿A cuál de los tres tipos de fuerzas, sobre las que hablamos en el quinto capítulo, se refiere la fuerza que comunica aceleración al cohete?

Lo más importante en el octavo capítulo

La característica más importante del movimiento es la cantidad de movimiento (el impulso) del cuerpo, magnitud vectorial igual al producto de la masa del cuerpo por su velocidad.

Una misma fuerza $\vec{F}$, que actúa durante un determinado intervalo de tiempo t, comunica a todos los cuerpos la misma cantidad de movimiento, igual al impulso de la fuerza $\vec{F}t$.

Para la cantidad de movimiento es justo el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN. La cantidad total de movimiento de los cuerpos, que forman un sistema cerrado, queda invariable con cualesquiera interacciones o movimientos de los cuerpos de este sistema.

9 PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

UNA DE LAS MÁS IMPORTANTES MAGNITUDES EN LAS CIENCIAS Y LA TÉCNICA

En el capitulo anterior hemos visto que gran importancia tiene una de las magnitudes para la que existe el principio de conservación (la hemos llamado cantidad de movimiento). Un papel de tan suma importancia lo desempeña también otra magnitud más que, para un sistema cerrado, asimismo queda invariable, o sea, se conserva. Esta magnitud recibe el nombre de ENERGÍA. Con ella se tropieza no sólo en mecánica, sino que en otras partes de la física, en todas las ciencias sobre la naturaleza y en todos los ámbitos de las ciencias. Pero antes de pasar al estudio del concepto de energía y a explicar el principio de conservación de ésta, debemos estudiar una magnitud llamada TRABAJO MECÁNICO (o sencillamente, TRABAJO). Esta magnitud está ligada íntimamente con la energía. Ella es de importancia por sí misma, ya que el funcionamiento de toda clase de máquinas y mecanismos, así como las actividades laborales del hombre, se reducen con frecuencia al trabajo mecánico. ¿Qué magnitud es ésta, el trabajo mecánico?

9.1. Trabajo mecánico. Definición general de trabajo

La magnitud que hemos denominado trabajo, apareció en mecánica sólo en el siglo XIX (casi 150 años después del descubrimiento de las leyes de movimiento de Newton), cuando la humanidad empezó a utilizar ampliamente máquinas y mecanismos. Pues, al hablar sobre una máquina en funcionamiento, decimos que "trabaja".

Ya hemos tropezado con la noción de "trabajo mecánico" en el curso de física anterior (véase A. V. Piórishkin, N. A. Ródina. Física I). Allí se indicó, que cuando sobre un cuerpo se ejerce el efecto de una fuerza constante $\vec{F}$ y el cuerpo realiza el desplazamiento $\vec{s}$, en la dirección que actúa la fuerza, con ello se efectúa trabajo, igual al producto de los módulos de la fuerza y el desplazamiento:

$$A = Fs.$$

Allí mismo fue introducida la unidad de trabajo JULIO (J). Recordemos que *en el SI se entiende por un julio, el trabajo que realiza una fuerza de* 1 N *al desplazarse su punto de aplicación a* 1 m

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

TRABAJO REALIZADO POR VARIAS FUERZAS. En el curso anterior de física hemos examinado el trabajo ejecutado por una fuerza dirigida en dirección al movimiento del cuerpo. En semejante caso, este último se mueve con aceleración. Con frecuencia, sobre el cuerpo actúa no una, sino varias fuerzas. ¿Cómo calcular el trabajo de éstas?

Para empezar, consideremos el caso en que el cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo y uniforme. Entonces, la suma vectorial de las fuerzas a las que está sometido el cuerpo es nula. Por ejemplo, durante la elevación de una carga con una grúa, sobre ésta actúa la fuerza de tensión del cable, dirigida en sentido del desplazamiento hacia arriba y la fuerza de gravedad, en sentido opuesto al movimiento, o sea, hacia abajo. Durante el desplazamiento de una caja de caudales por el suelo, sobre ella ejercen su efecto la fuerza muscular, con la que el hombre empuja o tira de dicha caja, y la fuerza de rozamiento de deslizamiento, dirigida en sentido inverso al movimiento.

TRABAJO POSITIVO Y NEGATIVO. ¿Realizan trabajo las fuerzas dirigidas en dirección contraria al movimiento?

Para responder a esta pregunta, recordemos que si la suma vectorial de las fuerzas aplicadas al cuerpo es igual a cero, todo debe transcurrir como si sobre él no actuara fuerza alguna. Pero, en tal caso, *el trabajo sumario de todas las fuerzas*, a las que está sometido el cuerpo, también debe ser nulo.

De aquí se desprende que las fuerzas dirigidas en sentido contrario al desplazamiento realizan asimismo trabajo, pero éste tiene el signo contrario al del trabajo realizado por la fuerza dirigida en sentido del movimiento (desplazamiento) del cuerpo. Así pues, *el trabajo puede ser tanto positivo, como negativo.*

Es lógico que consideremos *positivo* el trabajo cuando *las direcciones de la fuerza y del desplazamiento coinciden. El trabajo realizado por una fuerza de dirección contraria al desplazamiento del cuerpo es negativo.*

Por ejemplo, al elevar una carga, la fuerza de gravedad efectúa trabajo negativo.

TRABAJO DE UNA FUERZA DIRIGIDA BAJO CIERTO ÁNGULO AL DESPLAZAMIENTO. Más arriba, hemos hablado sólo del trabajo de fuerzas dirigidas bien en el mismo sentido que el movimiento, o bien en dirección contraria. En el primer caso, el trabajo de la fuerza lo consideramos positivo, en el segundo, negativo. Pero la dirección de la fuerza puede también no coincidir con la del desplazamiento. En la fig. 182 se muestra un trineo deslizándose por una superficie horizontal, la fuerza $\vec{F}$, aplicada a él, está dirigida formando el ángulo α al horizonte. ¿Cómo calcular el trabajo que ejecuta la fuerza $\vec{F}$, si el desplazamiento del trineo es igual a $\vec{s}$?

La fuerza $\vec{F}$ puede ser representada como la suma de dos fuerzas: $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (fig. 182, *a*). Como en sentido vertical el desplazamiento del trineo es nulo, el trabajo de la fuerza $\vec{F}_2$ es igual a cero. Por esta causa, el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ sólo será igual al de $\vec{F}_1$:

$$A = F_1 s. \tag{1}$$

En la figura vemos que $F_1 = F \cos \alpha$, así que

$$\boxed{A = Fs \cos \alpha.} \tag{2}$$

El trabajo, realizado por una fuerza constante, es igual al producto de los

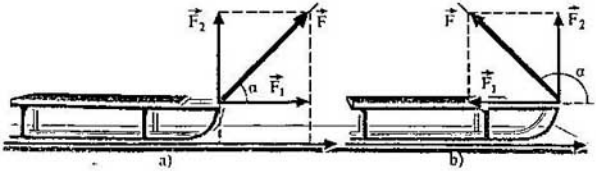


Fig. 182

módulos de la fuerza y del desplazamiento, multiplicado por el coseno del ángulo entre los vectores de la fuerza y el desplazamiento.

Señalemos que el producto $F \cos \alpha$ es igual a la proyección de la fuerza $\vec{F}$ sobre la dirección del desplazamiento. Por esto, podemos decir que el trabajo de la fuerza es igual al producto del módulo del desplazamiento y la proyección de la fuerza sobre la dirección de éste.

De la fórmula (2) se deduce que el TRABAJO es *una magnitud escalar*, aunque la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento $\vec{s}$ son magnitudes vectoriales. No se puede decir que el trabajo está dirigido en cierto sentido.

Si la dirección de la fuerza $\vec{F}$ coincide con la del desplazamiento $\vec{s}$, el ángulo $\alpha = 0$ y $\cos \alpha = 1$. Entonces, de la fórmula (2) se desprende que $A = Fs$.

Si el ángulo α es obtuso (véase la fig. 182, *b*), el $\cos \alpha$ toma valor negativo. Esto significa que el trabajo realizado por tal fuerza es negativo. En particular, si $\alpha = 180°$, $\cos \alpha = -1$ y el trabajo $A = -Fs$.

Y por fin, la dirección de la fuerza puede ser perpendicular al desplazamiento del cuerpo en movimiento. Aquí $\alpha = 90°$, $\cos \alpha = 0$ y $A = 0$. Por ejemplo, al desplazar una carga en dirección horizontal, la fuerza de gravedad, a la que ella está sometida, es perpendicular a la dirección del desplazamiento. Por esta razón, cuando un cuerpo se desplaza por un plano horizontal, el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a cero. Tampoco realiza trabajo alguno una fuerza que obliga al cuerpo a moverse uniformemente describiendo una circunferencia, ya que, como sabemos, semejante fuerza está dirigida a lo largo del radio hacia el centro de aquélla y, por consiguiente, en cualquier punto es perpendicular al desplazamiento del cuerpo. Por ejemplo, la fuerza de tensión de un hilo al que está atado un cuerpo, en movimiento uniforme por una circunferencia, no realiza trabajo. Tampoco lo ejecuta la fuerza de gravitación universal, bajo la acción de la que los satélites artificiales de la Tierra se mueven por una órbita circular.

¿ ?

1. ¿En qué casos se puede decir que la fuerza realiza trabajo?
2. ¿Es igual el trabajo que realiza la fuerza dada en dos sistemas de referencia en movimiento uniforme y rectilíneo uno respecto del otro?
3. A pesar de todos sus esfuerzos, los remeros de una barca no consiguen que ésta se ponga en movimiento contra la corriente. Pero tampoco se mueve corriente abajo. ¿Realizan los remeros trabajo?

Ejercicios 30

1. Calcular el trabajo que efectúa un concursante cuando eleva uniformemente una haltera de 140 kg de masa a 2 m de altura.
2. Un contenedor cargado de ladrillos, cuya masa es igual a 750 kg, se

eleva a una velocidad de 0,25 m/s. ¿Qué trabajo se realiza durante 20 s de elevación?

3. Una grúa eleva uniformemente una plancha de hormigón de dimensiones $320 \times 100 \times 10$ cm a una altura de 10 m. Calcular el trabajo realizado al subir la plancha si la densidad del hormigón es igual a 2400 kg/m^3.
4. Calcular el trabajo que realiza un niño cuando eleva un juguete de 200 g de masa a una altura de 50 cm con una aceleración de 5 m/s^2.

9.2. Trabajo: un caso más complicado

TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE. Si la fuerza que actúa sobre un cuerpo no es constante, sino que varía de punto en punto, para hallar el trabajo se obra del modo siguiente. El desplazamiento del cuerpo se divide en espacios tan pequeños $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \ldots$, que, a lo largo de cada uno de ellos, la fuerza que sobre el cuerpo actúa puede ser considerada constante e igual, respectivamente, a $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$. En cada uno de estos sectores, el trabajo se calcula empleando la fórmula (2) del parágrafo anterior:

$$A_1 = F_1 s_1 \cos\alpha_1, \; A_2 = F_2 s_2 \cos\alpha_2, \; \ldots$$

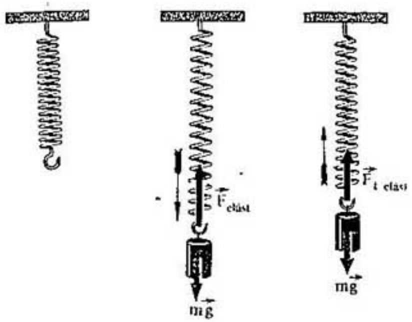
El trabajo total será igual a la suma de los trabajos en todos estos sectores.

Se puede obrar de otro modo: hallar el valor absoluto de la fuerza media, aplicada al cuerpo, y multiplicarla por $s \cos\alpha$.

Así se determina el trabajo en el caso general.

Cuando sobre un cuerpo en movimiento están aplicadas varias fuerzas, cada una de ellas realiza trabajo, siendo el trabajo total de todas esas fuerzas igual a la suma algebraica de los trabajos que efectúan las fuerzas cada una por separado.

Una misma fuerza, aplicada a un cuerpo, puede realizar tanto trabajo positivo, como negativo. Por ejemplo, examinemos el cuerpo fijado en un muelle y que cae (fig. 183). La fuerza elástica, que surge al deformarse el muelle, ejecuta trabajo negativo, ya que está dirigida hacia arriba, en tanto que el cuerpo se mueve hacia abajo. Al mismo tiempo, la fuerza de gravedad, que también actúa sobre el cuerpo, realiza trabajo positivo. Pero después de que el cuerpo alcance cierta posición inferior, él comenzará a moverse hacia arriba, los papeles de las fuerzas aplicadas al cuerpo variarán: la fuerza de gravedad realizará trabajo negativo, mientras que la elástica, cuya dirección coincide ahora con la del movimiento, ejecutará trabajo positivo. Así pues, la fuerza elástica y la de gravedad pueden realizar tanto trabajo positivo, como negativo. Mas no podemos decir esto de la fuerza de rozamiento que actúa sobre un cuerpo que resbala a lo largo de otro inmóvil. En este caso, la fuerza de rozamiento está dirigida en sentido contrario al movimiento. Por lo tanto, el trabajo de esta fuerza siempre es negativo. Señalemos que *cuando el trabajo de cierta fuerza es negativo, se dice que se realiza trabajo en contra de dicha fuerza.* Por ejemplo, al elevar una carga, se puede decir que la fuerza de tensión del cable de la grúa efectúa trabajo en contra de la fuerza de gravedad; la fuerza con que la locomotora actúa sobre el tren realiza trabajo en contra de la fuerza de rozamiento de las ruedas sobre los rieles y contra la fuerza de resistencia del aire, etc.



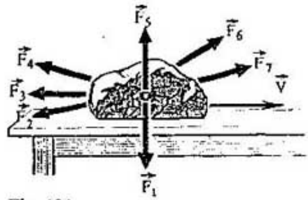


Fig. 184

Fig. 183

¿ ?

1. ¿En qué caso la fuerza realiza trabajo positivo y en cuál, negativo?
2. ¿A qué es igual el trabajo de una fuerza si ésta se dirige bajo cierto ángulo al sentido del desplazamiento del cuerpo?
3. ¿Bajo qué condición la fuerza aplicada a un cuerpo en movimiento no realiza trabajo?
4. Un automóvil se mueve por una carretera llana horizontal. ¿Realiza trabajo la fuerza de gravedad que actúa sobre el vehículo?
5. ¿Realiza trabajo la fuerza con que la Tierra atrae la Luna, cuando ésta se mueve por la órbita en torno del planeta? La órbita de la Luna debe considerarse circular.
6. En la fig. 184 viene representado un cuerpo al que están aplicadas varias fuerzas. Indicar cuáles de ellas realizan trabajo positivo y cuáles, negativo.
7. Un cuerpo fue lanzado hacia arriba verticalmente. Indicar si el trabajo de la fuerza de gravedad es positivo o negativo: a) al subir el cuerpo, b) al caer éste.

Ejercicios 31

1. Sobre una carga, que resbala con rozamiento por una superficie plana horizontal, actúa una fuerza de 200 N dirigida formando un ángulo de 60° hacia el horizonte. ¿Qué trabajo realizará la fuerza al desplazarse el cuerpo a 5 m, si el movimiento transcurre a velocidad constante? ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento de la carga contra el plano, si su masa es igual a 31 kg?
2. Un cuerpo, cuya masa es de 50 kg, se desliza con rozamiento por un plano inclinado, cuyo ángulo de inclinación respecto del horizonte es igual a 30°. Moviéndose a velocidad constante, el cuerpo recorre toda la longitud del plano, igual a 6 m. Calcular el trabajo de la fuerza de gravedad durante este movimiento y la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo.
3. Un esquiador de masa 70 kg sube en el elevador a lo largo de una vertiente de 180 m de largo, que con el horizonte forma un ángulo de 60°. Calcular el trabajo de la fuerza de gravedad que sobre el esquiador actúa. ¿Qué signo tiene aquél? ¿Qué trabajo realiza el elevador sobre el esquiador? La subida transcurre a velocidad constante.

9.3. Trabajo realizado por las fuerzas aplicadas al cuerpo y variación de su velocidad

Consideremos un cuerpo sobre el que actúa una fuerza constante $\vec{F}$, ésta también puede ser la resultante de varias fuerzas. Sobre la fuerza $\vec{F}$ podemos decir lo siguiente: primero, ella ha comunicado al cuerpo aceleración, gracias a lo cual varía su velocidad; segundo, la fuerza $\vec{F}$ realiza trabajo, ya que el cuerpo se desplaza. Podemos esperar que entre el trabajo realizado por la fuerza y la variación de la velocidad del cuerpo existe determinada ligazón. Intentemos establecerla.

Examinemos el caso más sencillo, cuando los vectores de la fuerza y el desplazamiento están dirigidos a lo largo de una misma recta, en un mismo sentido. Dirijamos el eje de coordenadas hacia ese mismo lado (fig. 185). Entonces, las proyecciones de la fuerza $\vec{F}$, del desplazamiento $\vec{s}$, de la aceleración $\vec{a}$ y de la velocidad $\vec{v}$ serán iguales a los módulos de los propios vectores.

El trabajo de la fuerza en este caso será:

$$A = Fs. \tag{1}$$

Según la segunda ley de Newton

$$F = ma. \tag{2}$$

En el segundo capítulo hemos deducido que, para el movimiento rectilíneo, el desplazamiento y la velocidad están ligados mediante la correlación

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}, \tag{3}$$

donde v_1 y v_2 son los módulos de los vectores de las velocidades al principio y al final del sector del camino que consideramos, recorrido por el cuerpo.

Pongamos en la fórmula (1) las expresiones para F y s de las fórmulas (2) y (3), después de lo cual obtenemos

$$a = Fs = ma\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4}$$

Hemos hallado una fórmula que liga el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ con la variación de la velocidad del cuerpo (con mayor precisión, del cuadrado de la velocidad).

ENERGÍA CINÉTICA. La expresión en el segundo miembro de la igualdad (4) es la variación de la magnitud $\frac{mv^2}{2}$, es decir, la mitad del producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la velocidad con que se mueve. Esta magnitud lleva el nombre de ENERGÍA CINÉTICA DEL CUERPO en movimiento y se designa por la letra E_c. Entonces, la fórmula (4) adquiere el aspecto:

$$\boxed{A = E_{c2} - E_{c1}.}$$

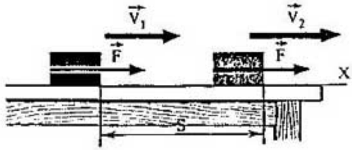


Fig. 185

El trabajo de la resultante de las fuerzas, aplicadas a un cuerpo, es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo.

Esta afirmación recibe el nombre de TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA.

Cuando la fuerza que sobre el cuerpo actúa está dirigida en dirección del movimiento y, por consiguiente, realiza trabajo positivo, $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} > 0$. Esto quiere decir que $\frac{mv_2^2}{2} > \frac{mv_1^2}{2}$, o sea, que la energía cinética del cuerpo aumenta. Así precisamente debe ser, ya que la fuerza dirigida en sentido del movimiento del cuerpo aumenta el módulo de su velocidad. Es fácil comprender que, cuando la dirección de la fuerza es contraria a la del desplazamiento y, por lo tanto, ella realiza trabajo negativo, la energía cinética del cuerpo disminuye.

De la fórmula (4) se desprende que la energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en julios.

El teorema de la energía cinética ha sido obtenido, haciendo uso de la segunda ley de Newton. Por esta causa, *es justo independientemente de qué fuerzas actúan precisamente sobre el cuerpo: la elástica, la de rozamiento o la de gravitación universal, en particular, la fuerza de gravedad.*

También es posible mostrar que *el teorema de la energía cinética es justo en aquellos casos, en que la fuerza no es constante y cuando su dirección no coincide con la del desplazamiento.*

El sentido físico de la energía cinética es fácil de comprender. Imaginémonos que a un cuerpo en reposo ($v_0 = 0$) de masa m hay que comunicarle la velocidad v; por ejemplo, es necesario comunicar dicha velocidad a un proyectil que se encuentra en reposo en el cañón de una pieza de artillería. Para ello deberá realizarse determinado trabajo A. ¿Cuál es este trabajo?

Del teorema de la energía cinética sigue que

$$A = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Así pues, la energía cinética de un cuerpo de masa m, en movimiento a la velocidad v, es igual al trabajo que debe realizar la fuerza que actúa sobre el mismo en reposo, para comunicarle dicha velocidad. Un trabajo de este mismo módulo será realizado al parar el cuerpo.

Del mencionado teorema también se desprende que *la energía cinética es una magnitud física que caracteriza el cuerpo en movimiento. Su variación es igual al trabajo que efectúa la fuerza aplicada al cuerpo.*

PROBLEMA. ¿Qué trabajo hay que realizar para que un tren, que se mueve a la velocidad $v_1 = 72$ km/h, aumente su velocidad hasta $v_2 = 108$ km/h? La masa del tren es $m = 1000$ t. ¿Qué fuerza hay que aplicar al tren si dicho aumento de la velocidad debe transcurrir en un sector de 2 km de longitud? Considerar que el movimiento es uniformemente variado.

Solución. El trabajo A se puede hallar por la fórmula

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Poniendo aquí los datos del problema, obtenemos:

$$A = \frac{10^6\ \text{kg}\left(30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} - \frac{10^6\ \text{kg}\left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 250 \cdot 10^6\ \text{J} = 250\,000\ \text{kJ}.$$

Por definición $A = Fs$. Por consiguiente:

$$F = \frac{A}{s},\quad F = \frac{250 \cdot 10^6\ \text{J}}{2000\ \text{m}} = 125\,000\ \text{N} = 125\ \text{kN}.$$

¿?

1. ¿Qué es la energía cinética del cuerpo? ¿Esta magnitud, es escalar o vectorial?
2. ¿En qué consiste el teorema de la energía cinética?
3. ¿Cómo varía la energía cinética de un cuerpo, si la fuerza que se le aplica realiza trabajo positivo?
4. ¿Cómo varía la energía cinética de un cuerpo si la fuerza que se le aplica realiza trabajo negativo?
5. ¿Variará la energía cinética de un cuerpo en movimiento al cambiar la dirección del vector de su velocidad?
6. Dos bolas de igual masa ruedan al encuentro a velocidades de igual módulo por una superficie muy lisa. Las bolas chocan y después del impacto se mueven en direcciones opuestas a velocidades de esos mismos módulos. ¿A qué es igual su energía cinética total antes del choque, en el instante de éste y después de él?

Ejercicios 32

1. A un cuerpo en reposo de masa de 3 kg se le aplica una fuerza de 40 N. Después de esto, el cuerpo recorre 3 m sin rozamiento por una superficie lisa horizontal. A continuación, la fuerza disminuye hasta 20 N y el cuerpo recorre 3 m más. Hallar la energía cinética del cuerpo y su velocidad al final de este sector.
2. ¿Qué trabajo debe ser realizado para detener un tren de 1000 t de masa que se mueve a una velocidad de 108 km/h?
3. Calcular la energía cinética de un satélite artificial de la Tierra de 1300 kg de masa que se mueve por una órbita circular a una altura de 100 km sobre la Tierra.
4. Un cuerpo, que tiene energía cinética igual a 10 J, se mueve uniformemente por una circunferencia, cuyo radio es de 0,5 m. ¿Qué fuerza actúa sobre el cuerpo? ¿Cómo está dirigida? ¿Cuál es el trabajo de esta fuerza?
5. Un chófer desconectó el motor del automóvil a la velocidad de 72 km/h. Después de esto, el vehículo recorrió 34,0 m y se paró. ¿A qué era igual la energía cinética del auto en el momento cuando se paró el motor, si la fuerza de rozamiento de las ruedas con la carretera

constituye 5880 N? ¿Cuál es la masa del automóvil?

6. Un automóvil de 4 t de masa se mueve a la velocidad de 36 kg/h. ¿Qué recorrido realizará el auto hasta su parada total, si la fuerza de rozamiento de las ruedas con la carretera es igual a 5880 N?

Tarea

Analizar las soluciones de los problemas 5 y 6 de los ejercicios 32 y aclarar de qué magnitud depende la distancia de frenado del cuerpo en movimiento para el valor prefijado del módulo de la fuerza frenadora. Comparar el resultado del análisis con la fórmula a en 6.7.

9.4. Trabajo de la fuerza de gravedad

Como ya hemos indicado, el teorema de la energía cinética es justo para todas las fuerzas, ya que aquél es un corolario directo de la segunda ley de Newton. Pero el trabajo, que realiza cada una de las fuerzas mecánicas que conocemos, puede ser calculado no empleando el teorema de la energía cinética, sino mediante las fórmulas para dichas fuerzas que obtuvimos en el cap. 5.

Comencemos por la fuerza de gravedad, aquella con que la Tierra actúa sobre el cuerpo cerca de su superficie, donde ella puede ser considerada constante e igual a $m\vec{g}$ (m es la masa del cuerpo; $\vec{g}$, la aceleración de la caída libre).

Cuando un cuerpo se mueve verticalmente hacia abajo, la fuerza de gravedad tiene la misma dirección que el desplazamiento. Al pasar de la altura h_1 sobre cierto nivel, del cual comenzaremos a llevar la cuenta de la altura, hasta la altura h_2 sobre ese mismo nivel (fig. 186), el cuerpo efectúa un desplazamiento igual en módulo a $h_1 - h_2$. Como las direcciones del desplazamiento y la fuerza coinciden, el trabajo de la fuerza de gravedad es positivo e igual a

$$A = mg(h_1 - h_2). \qquad (1)$$

No es obligatorio llevar la cuenta de las alturas h_1 y h_2 desde la superficie de la Tierra. Como origen de registro se puede elegir cualquier nivel. Éste puede ser el suelo de una habitación, una mesa o el fondo de una zanja cavada en la tierra, etc. Puesto que en la fórmula para el trabajo figura la diferencia de alturas, que no depende desde donde empezamos a contar la altura, lo único que es preciso consiste en determinar la altura del cuerpo en distintas posiciones respecto de un mismo nivel. La altura del nivel puede ser tomada igual a cero y por eso recibe el nombre de NIVEL NULO.

Por ejemplo, podríamos considerar nulo el nivel B (véase la fig. 186). Entonces, el trabajo se expresaría mediante la igualdad

$$A = mgh, \qquad (2)$$

donde h es la distancia vertical entre los niveles A y B.

Si el cuerpo se mueve verticalmente hacia arriba, la fuerza de gravedad tiene dirección contraria al desplazamiento y su trabajo será negativo. Durante la subida de un cuerpo a partir del nivel nulo a la altura h, la fuerza de gravedad

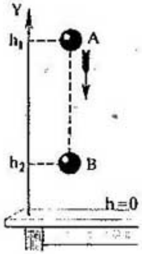


Fig. 186

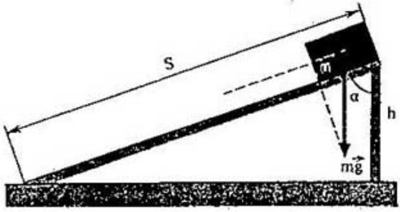


Fig. 187

realiza el trabajo

$$A = -mgh.$$

UNA VEZ MÁS ACERCA DEL PLANO INCLINADO. Aclaremos ahora qué trabajo ejecuta la fuerza de gravedad cuando el cuerpo se mueve no verticalmente.

Como ejemplo, examinemos el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado (fig. 187). Supongamos que el cuerpo de masa m realiza por el plano inclinado de altura h el desplazamiento $\vec{s}$, cuyo módulo es igual a la longitud de dicho plano. El trabajo de la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ debe ser calculado en este caso recurriendo a la fórmula $A = mgs \cos\alpha$. Pero en la figura vemos que

$$s \cos\alpha = h.$$

Por lo tanto,

$$A = mgh.$$

Para el trabajo hemos obtenido la misma expresión que la fórmula (2).

Resulta que el trabajo de la fuerza de gravedad no depende de si se mueve el cuerpo verticalmente o pasa un recorrido más largo por un plano inclinado. Para una misma "pérdida de altura", el trabajo de la fuerza de gravedad es el mismo (fig. 188).

Entonces, ¿por qué en la técnica y en la vida cotidiana al elevar cargas se usa con frecuencia el plano inclinado? ¡En efecto, el trabajo para desplazar la carga por un plano inclinado es el mismo que al elevarla verticalmente!

La explicación es la siguiente. En caso del movimiento uniforme de la carga por un plano inclinado la fuerza, que ha de ser aplicada a ella en la dirección del desplazamiento, es menor que la fuerza de gravedad. Es verdad que en este caso la carga realiza mayor recorrido. El aumento del recorrido es lo que se "paga" a causa de que por el plano inclinado la carga puede desplazarse aplicando una fuerza menor.

PARTICULARIDAD DEL TRABAJO DE LA FUERZA DE GRAVEDAD. El trabajo de esta fuerza queda definido por la "pérdida de altura" no sólo cuando el movimiento se realiza por un plano inclinado. Cuando el movimiento se efectúa por cualquier otro camino esto también es justo. En

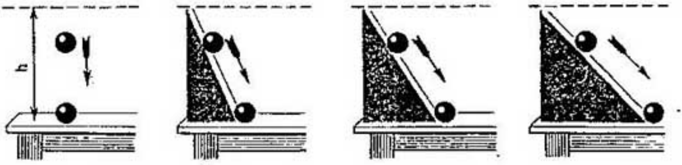


Fig. 188

efecto, supongamos que un cuerpo se mueve por cierto camino elegido al azar, por ejemplo, por el que viene representado en la fig. 189. Podemos mentalmente dividir este camino en una serie de pequeños sectores: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, etc. Cada uno de ellos puede ser considerado como un pequeño plano inclinado, mientras que todo el movimiento del cuerpo por el camino AB lo podemos representar como el movimiento por un conjunto de planos inclinados, que pasan de unos a otros. El trabajo de la fuerza de gravedad en cada uno de semejantes planos es igual al producto de mg por la variación de la altura del cuerpo en él. Si las variaciones de las alturas en los sectores por separado son iguales a h_1, h_2, h_3, etc., los trabajos de la fuerza de gravedad en ellos serán iguales a mgh_1, mgh_2, mgh_3, etc. El trabajo total al recorrer el camino completo se puede hallar sumando todos esos trabajos:

$$A = mgh_1 + mgh_2 + mgh_3 + \ldots = mg(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots).$$

Pero

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = h.$$

Por lo tanto,

$$A = mgh.$$

Así pues, el trabajo de la fuerza de gravedad no depende de la trayectoria del cuerpo y siempre es igual al producto del módulo de la fuerza de gravedad por la diferencia de alturas en las posiciones inicial y final. *Durante el movimiento hacia abajo, este trabajo es positivo, para el movimiento hacia arriba, negativo.*

Si después de elevar un cuerpo, éste retorna al punto inicial, en semejante recorrido cerrado ("ida y vuelta") el trabajo es nulo. Ésta es una de las

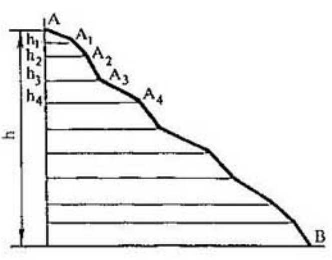


Fig. 189

particularidades de la fuerza de gravedad: *por una trayectoria cerrada, el trabajo de la fuerza de gravedad es nulo.*

¿ ?

1. ¿Depende el trabajo de la fuerza de gravedad de la longitud del recorrido realizado por el cuerpo y de la masa de éste?
2. Un cuerpo lanzado formando cierto ángulo con el horizonte, describió una parábola y cayó a la tierra. ¿A qué es igual el trabajo de la fuerza de gravedad si los puntos inicial y final de la trayectoria yacen en una misma horizontal?
3. ¿Qué fuerza es la que realiza trabajo durante el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado sin rozamiento? ¿Depende este trabajo de la longitud del plano inclinado?

9.5. Energía potencial de un cuerpo sobre el que actúa la fuerza de gravedad

La igualdad

$$A = mg(h_1 - h_2), \tag{1}$$

que expresa el trabajo de la fuerza de gravedad, aplicada a cierto cuerpo, puede ser representada en otra forma. Abriendo el paréntesis y cambiando de lugar los términos, obtenemos:

$$A = -(mgh_2 - mgh_1). \tag{2}$$

Ahora, en el segundo miembro de la igualdad vemos una expresión que es la variación de la magnitud, igual al producto de la masa del cuerpo m por el módulo de la aceleración de la caída libre $\vec{g}$ y por la altura h, a la que fue elevado el cuerpo. Resulta que el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a la variación de la magnitud mgh[1], tomada con signo contrario.

Más arriba (véase 9.3) denominamos energía cinética de un cuerpo en movimiento la magnitud $mv^2/2$, cuya variación es igual al trabajo de cierta fuerza. Ahora vemos que existe una magnitud más, cuya variación (aunque con signo contrario) también es igual al trabajo de cierta fuerza, en el caso dado de la fuerza de gravedad. Por esta causa, la magnitud mgh también es llamada energía, mas no cinética, sino que POTENCIAL: mgh es la energía potencial de un cuerpo, sobre el que actúa la fuerza de gravedad, elevado a la altura h respecto al nivel nulo. Con frecuencia, para mayor brevedad, la magnitud mgh recibe el nombre de ENERGÍA POTENCIAL DEL CUERPO.

Por consiguiente, *el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a la variación de la energía potencial tomada con signo contrario.*

El signo "menos" delante de la variación de la energía potencial significa que, siendo positivo el trabajo de la fuerza de gravedad, esta energía disminuye. Y viceversa, para el trabajo negativo de la fuerza de gravedad (¡el cuerpo fue lanzado hacia arriba!) la energía potencial del cuerpo aumenta. Como hemos visto, la energía cinética se comporta precisamente al revés.

[1] Recordemos que se denomina variación de cierta magnitud la diferencia entre sus valores ulterior y anterior y no a la inversa.

Designando la energía potencial mgh por E_p, podemos escribir:

$$\boxed{A = -(E_{p2} - E_{p1}).} \quad (3)$$

Acordemos que a la altura h_2 en la fórmula (2) le corresponde el nivel nulo. Designemos la altura del cuerpo sobre dicho nivel con h. Entonces, $E_{p2} = mgh_2 = 0$ y la fórmula (3) toma el aspecto:

$$E_p = A.$$

De aquí se desprende que la energía potencial de un cuerpo, sobre el que actúa la fuerza de la gravedad, es igual al trabajo realizado por dicha fuerza al bajar el cuerpo hasta el nivel nulo.

Recordemos que en la pág. 199 definiciones semejantes fueron dadas para la energía cinética. Para ella el "nivel nulo" era la velocidad $v = 0$.

A diferencia de la cinética, la cual depende de la velocidad de movimiento del cuerpo, la energía potencial no depende de esta magnitud, de forma que un cuerpo en reposo puede poseer esta última energía. *La energía potencial depende de la posición que ocupa el cuerpo respecto del nivel nulo, es decir, de las coordenadas del cuerpo*, ya que la altura h, justamente, es la coordenada de éste.

Hemos visto que el nivel nulo se puede tomar de forma arbitraria. Puede resultar que el cuerpo se encuentra debajo de dicho nivel y que su coordenada es negativa. En tal caso, la energía potencial del cuerpo también será negativa. *El signo de la energía potencial y su valor absoluto dependen de la elección del nivel nulo.* En lo que atañe al trabajo que se realiza durante el desplazamiento del cuerpo, aquél queda definido por la *variación* de la energía potencial de éste. Él no depende de la elección del nivel nulo.

¿ ?

1. ¿Cómo está ligado el trabajo de la fuerza de gravedad con la energía potencial de un cuerpo?
2. ¿Cómo varía la energía potencial de un cuerpo durante su movimiento hacia arriba?
3. ¿Qué sucede con la energía potencial de un cuerpo durante su caída libre?
4. ¿En qué difiere la energía potencial de un cuerpo elevado de la energía cinética?

Ejercicios 33

1. Una carga de masa de 2,5 kg cae desde la altura de 10 m. ¿Cuánto variará su energía potencial 1 s después de comenzar la caída (la velocidad inicial de la carga es igual a cero)?
2. ¿Qué trabajo se realiza cuando un hombre de 75 kg de masa sube por una escalera desde la entrada a la casa hasta el 6° piso, si la altura de cada piso es de 3 m? Considerar que el movimiento del hombre es uniforme. (Explicar por qué esta última indicación es de importancia.)
3. La diferencia de altura entre la línea de salida y la meta de una ruta para competiciones de esquís de montaña constituye 400 m. Un slalomista parte de la línea de salida y felizmente llega a la meta. ¿A qué será igual el trabajo de la fuerza de gravedad que actúa sobre el esquiador, si éste antes de la partida pesa 686 N?

4. La meta de las competiciones de esquís de montaña se encuentra a una altura de 2000 m sobre el nivel del mar, mientras que la línea de salida, a 400 m sobre la meta. ¿A qué será igual la energía potencial del esquiador en la línea de salida respecto de la meta y del nivel del mar? La masa del esquiador es 70 kg.

9.6. Trabajo de la fuerza elástica. Energía potencial de un cuerpo deformado elásticamente

Como sabemos, la fuerza elástica surge al deformar los cuerpos. Por su valor absoluto es proporcional a la deformación (alargamiento) y está dirigida en sentido contrario a la dirección del desplazamiento de los puntos del cuerpo durante la deformación.

En la fig. 190, *a* se muestra un muelle en su estado natural, no deformado. Su extremo derecho está fijado, mientras que en el izquierdo se encuentra sujeto un cuerpo. Dirijamos el eje de coordenadas X como viene mostrado en la figura. Si comprimimos el muelle, desplazando con la mano su extremo izquierdo a una distancia x_1 (fig. 190, *b*), surgirá cierta fuerza elástica que actuará sobre el cuerpo por parte del muelle. La proyección de esta fuerza en el eje X será igual a:

$$(F_{\text{elást }1})_x = -kx_1,$$

donde k es la rigidez del muelle.

Soltemos ahora el muelle. En tal caso, el extremo del muelle se desplazará a la izquierda. Durante el desplazamiento de las espiras del muelle, la fuerza elástica realizará trabajo. Vamos a calcularlo.

Supongamos que el extremo izquierdo se desplazó de la posición A a la B (fig. 190, *c*). Con esto, la deformación del muelle ya no es x_1, sino x_2. El módulo del desplazamiento del extremo del muelle es igual a la diferencia $x_1 - x_2$ de las coordenadas del extremo del muelle. Como vemos en la figura, la dirección de la fuerza y del desplazamiento, coinciden. Por esta causa, para calcular el trabajo de la fuerza elástica, hay que multiplicar los valores absolutos de esa fuerza y del desplazamiento. Pero la fuerza elástica varía de punto en punto cuando el cuerpo se mueve. Si en el punto inicial el módulo de la fuerza era igual a kx_1, en el punto final (punto B) resultará kx_2.

Para calcular el trabajo de la fuerza elástica, hay que tomar el valor medio del módulo de ésta y multiplicarlo por $x_1 - x_2$ (véase 9.2):

$$A = F_{\text{elást.med}}(x_1 - x_2).$$

La fuerza elástica es proporcional a la deformación del muelle. Por eso el valor medio del módulo de esa fuerza puede ser hallado aplicando el método que usamos para definir el valor medio de la velocidad del movimiento variado (véase 2.3). Para el valor medio de la proyección de la velocidad de dicho movimiento obtuvimos la fórmula

$$(v_{\text{med}})_x = \frac{v_{0x} + v_{1x}}{2},$$

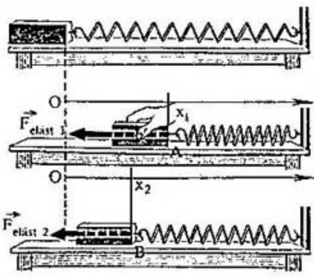


Fig. 190

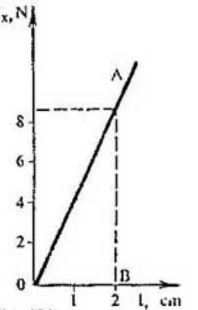


Fig. 191

donde v_{0x} y v_{1x} son las proyecciones sobre el eje X de las velocidades inicial y la siguiente. De forma semejante, el valor medio del módulo de la fuerza elástica se puede definir recurriendo a la fórmula

$$F_{\text{elást, med}} = k\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Por este valor del módulo de la fuerza elástica hay que multiplicar el desplazamiento $x_1 - x_2$, con el fin de obtener el trabajo de esa fuerza:

$$A = k\frac{x_1 + x_2}{2}(x_1 - x_2).$$

Como $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2$, la fórmula anterior toma el aspecto

$$A = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Esta fórmula también se puede escribir así:

$$A = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \qquad (1)$$

Aquí, en el segundo miembro vemos la *variación* de la magnitud $kx^2/2$ con signo "menos".

En 9.5 la magnitud mgh, cuya variación con signo negativo, como vimos, resultó igual al trabajo de la fuerza de gravedad, fue llamada energía potencial de un cuerpo elevado. De modo análogo, la magnitud $kx^2/2$ denomínase energía potencial de un cuerpo deformado elásticamente (por ejemplo, de un muelle).

Así pues, la fórmula (1) quiere decir que *el trabajo de la fuerza elástica es igual a la variación de la energía potencial del muelle tomada con signo contrario.*

Designando aquí también la energía potencial $kx^2/2$ por la letra E_p, podemos escribir de nuevo:

$$\boxed{A = -(E_{p2} - E_{p1}).} \quad (2)$$

Lo mismo que la magnitud mgh, la energía potencial de un cuerpo deformado elásticamente depende de las coordenadas, ya que x_1 y x_2 en la fórmula (1) son los alargamientos del muelle, pero al mismo tiempo, las coordenadas del extremo de éste. Podemos decir, que, en todos los casos, la energía potencial depende de las coordenadas.

De la fórmula (1) sigue que el trabajo de la fuerza elástica sólo depende de las coordenadas inicial y final. Por esto, acerca del trabajo de la fuerza elástica es posible decir lo mismo que dijimos sobre el de la fuerza de gravedad: aquél no depende de la forma de la trayectoria y durante el movimiento del cuerpo, bajo el efecto de la fuerza elástica por una trayectoria *cerrada*, el trabajo de esa fuerza es igual a cero.

Hemos visto que la energía potencial de un cuerpo, sobre el que se ejerce la fuerza de gravedad, depende de la posición del nivel nulo tomado al azar. Del mismo modo, en el caso que hemos examinado del muelle deformado, hubiera sido posible, de manera arbitraria en absoluto, elegir el nivel desde el que se llevó a cabo la lectura de las coordanadas.

Tomemos en la fórmula (1) la coordenada del extremo del muelle no deformado como cero ($x_2 = 0$) y designemos su alargamiento por x. Entonces, $E_{p2} = kx^2/2 = 0$ y la expresión (2) tomará la forma:

$$E_p = A.$$

De aquí se deduce que la energía potencial de un cuerpo deformado elásticamente es igual al trabajo que realiza la fuerza elástica, cuando el cuerpo pasa al estado en el cual es nula la deformación de éste. Semejante estado se considera "nulo".

¿ ?

1. ¿Cómo se determina el valor medio de la fuerza elástica?
2. ¿En qué consiste el parecido entre el trabajo de las fuerzas elástica y de gravedad?
3. ¿A qué es igual el trabajo de la fuerza elástica si el cuerpo, sobre el que ella actúa, después de recorrer cierta distancia retorna al punto inicial?
4. ¿A qué es igual la energía potencial de un cuerpo deformado elásticamente? ¿Cómo está ligado el trabajo de la fuerza elástica con la energía potencial de la deformación elástica?
5. ¿Qué hay de común entre la energía potencial de un cuerpo, sobre el que actúa la fuerza de gravedad, y la de un cuerpo sometido a la fuerza elástica?

Ejercicios 34

1. Un niño determinó la fuerza máxima con la que puede estirar un dinamómetro. Ésta resultó igual a 400 N. ¿Qué trabajo se realiza al alargar el muelle? La rigidez del muelle es igual a 10000 N/m.
2. Un muelle está colgado de uno de sus extremos, mientras que del extremo libre está suspendido un cuerpo de 18 kg de masa. En estas condiciones la longitud del muelle es de 10 cm. Cuando del mismo se suspende un cuerpo de 30 kg de masa, su longitud constituye 12 cm.

Calcular el trabajo que deberá realizarse para estirar el muelle de 10 a 15 cm.

3. En la fig. 191 se muestra la gráfica de la dependencia entre la fuerza elástica, que surge al comprimir el muelle de una pistola de juguete, y su deformación. Calcular el trabajo que se realiza al comprimir el muelle 2 cm. Demostrar que ese trabajo es numéricamente igual al área del triángulo AOB.
4. Se dispone de dos muelles de igual rigidez. Uno de ellos está comprimido 5 cm y el segundo, alargado 5 cm. ¿En qué difieren los alargamientos de estos muelles y sus energías potenciales?
5. De una balanza de resorte está colgada una carga. Con ello, ésta ha bajado y la aguja de la balanza se paró en la cifra 3. ¿Cuánto ha aumentado la energía potencial del resorte de la balanza, si su escala está graduada en newtones y la distancia entre dos divisiones vecinas de la escala es igual a 5 mm?
6. Un muelle comprimido, cuya rigidez es de 10 000 N/m, actúa sobre un cuerpo fijado en él con una fuerza de 400 N. ¿A qué es igual la energía potencial del muelle? ¿Qué trabajo se realizó durante su compresión? ¿Qué trabajo efectuará la fuerza elástica del muelle, si permitimos que éste cobre su estado inicial?

9.7. La energía potencial es energía de interacción. Definición general de energía

Cuando en los anteriores capítulos hablábamos de la energía: cinética o potencial, nos referíamos a la energía de cuerpos aislados. Sin embargo, esto no es del todo justo.

Si se trata de la energía cinética $mv^2/2$, ésta se puede, realmente, adjudicar al cuerpo que se mueve a determinada velocidad $\vec{v}$ (con relación al sistema de referencia elegido).

Pero al referirnos a la energía potencial el cuerpo por sí mismo no puede poseer dicha energía.

Ésta queda definida por la fuerza que actúa sobre un cuerpo por parte de otro. Pero los cuerpos en interacción son equitativos. Por este motivo, *sólo tienen energía potencial los cuerpos en interacción.* La energía potencial es la energía de interacción entre los cuerpos.

Por ejemplo, cuando un cuerpo se encuentra sobre la Tierra y en él actúa la fuerza $m\vec{g}$, el cuerpo también somete a la Tierra a la acción de la fuerza $-m\vec{g}$. Además, posee energía potencial no el cuerpo o la Tierra por separado, sino que el sistema de cuerpos constituido por el cuerpo y nuestro planeta. Si el sistema de referencia y el nivel nulo se ligan con la superficie de la Tierra, suelen decir, para mayor brevedad, que posee la energía potencial el propio cuerpo que se encuentra cerca de la superficie de la Tierra. Así es cómo operábamos más arriba.

En el caso de un cuerpo elásticamente deformado, por ejemplo de un muelle, posee energía potencial no cada punto de éste, sino que el cuerpo entero, constituido por puntos en interacción.

Como la fuerza de interacción depende de las coordenadas de los cuerpos, la energía potencial también es función de sus coordenadas. En esto consiste la diferencia entre la energía potencial y la cinética.

14 – 948

Así pues, la energía potencial de un sistema de cuerpos es igual a todo el trabajo que puede ser realizado cuando dicho sistema pasa al nivel nulo.

En el caso de la energía cinética, el nivel nulo es el estado con el que la velocidad del cuerpo es igual a cero.

En general, la energía de un cuerpo o de un sistema de cuerpos es igual a todo el trabajo que puede ser realizado al pasar dicho cuerpo o sistema de cuerpos al nivel nulo.

9.8. Principio de conservación de la energía mecánica total

Al principio del capítulo, indicamos que para la energía es justo el principio de conservación. Aclaremos en qué consiste.

Examinemos cómo varía la energía de los cuerpos que están en interacción *sólo entre sí*. Recordemos que aquéllos forman un sistema cerrado de cuerpos (véase el cap. 8).

Los cuerpos en interacción pueden tener energía cinética y potencial, simultáneamente. Por ejemplo, un satélite artificial de la Tierra posee energía cinética a causa de que está en movimiento. Además, el sistema satélite – Tierra, tiene energía potencial, ya que el satélite y el planeta interactúan mediante la fuerza de gravitación universal. Dos bolas que chocan también poseen al mismo tiempo energía cinética, por estar en movimiento, y potencial, por estar elásticamente deformadas.

Pero si los cuerpos que constituyen un sistema cerrado se encuentran en interacción, ellos deben moverse de alguna manera, unos respecto de otros. Con ello, pueden variar tanto sus velocidades, como las coordenadas. Por consiguiente, puede variar tanto la energía cinética, como la potencial.

Designemos por E_{p1} la energía potencial de los cuerpos en interacción en cierto momento de tiempo, mientras que por E_{c1}, su energía cinética total en ese mismo instante. La energía potencial y cinética de esos mismos cuerpos en cualquier otro momento de tiempo, la designaremos por E_{p2} y E_{c2}, respectivamente.

En 9.5 y 9.6 establecimos que, cuando los cuerpos están en interacción mediante las fuerzas elástica o de gravedad, el trabajo A realizado por estas fuerzas es igual a la variación de la energía potencial de los cuerpos tomada con signo contrario:

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}). \tag{1}$$

Por otro lado, de acuerdo con el teorema de la energía cinética, el trabajo efectuado por esas mismas fuerzas es igual a la variación de la energía cinética:

$$A = E_{c2} - E_{c1}. \tag{2}$$

De la comparación de las fórmulas (1) y (2) sigue que las variaciones de la energía cinética y de la energía potencial son iguales por su valor absoluto, mas tienen signos contrarios:

$$E_{c2} - E_{c1} = -(E_{p2} - E_{p1}). \tag{3}$$

Si la energía potencial de los cuerpos aumenta, su energía cinética disminuye *en* *esa misma* magnitud y viceversa. De aquí concluimos que es como si tuviera lugar la *transformación de un tipo de energía en otro.*

La fórmula (3) puede ser escrita de otro modo:

$$\underline{\overline{E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1}}}\,. \tag{4}$$

De aquí se deduce que la suma de las energías cinética y potencial de los cuerpos, que forman un sistema cerrado y que están en interacción por medio de las fuerzas de gravitación universal y elástica, siempre queda constante. En esto consiste la esencia del PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA.

Por regla, la suma de las energías cinética y potencial de un sistema de cuerpos recibe el nombre de ENERGÍA MECÁNICA TOTAL.

La energía mecánica total de un sistema cerrado de cuerpos, que están en interacción mediante las fuerzas de gravitación universal y elástica, siempre es invariable.

Uno de los más admirables fenómenos de la naturaleza es la transformación de la energía potencial en cinética o bien la energía cinética en potencial. Ésta es la propiedad distintiva fundamental de la energía.

El principio de conservación y transformación de la energía permite comprender mejor el sentido físico del trabajo. Del hecho de que un mismo trabajo conduce al aumento de la energía cinética y a la disminución de la energía potencial en esa misma magnitud, se desprende que *el trabajo es igual a la energía que se transforma de un tipo a otro.*

En el octavo capítulo estudiamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado de cuerpos. Ahora hemos obtenido el segundo principio de conservación, el de la energía. Estos dos principios tienen el carácter más general y son de absoluta precisión, incluso cuando las leyes de la mecánica de Newton dejan de ser justas.

El principio de conservación de la energía total puede ser utilizado para resolver múltiples problemas de mecánica

PROBLEMA 1. ¿Qué altura h alcanza un cuerpo lanzado hacia arriba a velocidad inicial $\vec{v}_0$?

Solución. Tomemos como origen de registro de la altura el punto desde el que fue lanzado el cuerpo. En este punto la energía potencial del cuerpo será nula, mientras que la cinética, igual a $mv_0^2/2$. Por lo tanto, la energía total del cuerpo: $0 + mv_0^2/2 = mv_0^2/2$. En el punto superior, a la altura h, la energía potencial será mgh, mientras que la cinética, nula. Así pues, en dicho punto la energía total será igual a mgh. De acuerdo con el principio de conservación de la energía total

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}.$$

De donde

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

PROBLEMA 2. Una bola de masa $m = 3$ kg se encuentra a una altura $h =$

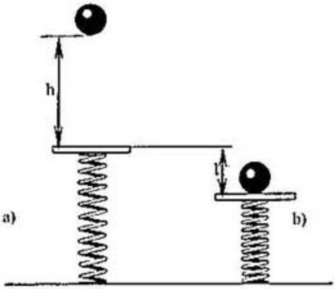


Fig. 192

$= 3$ m sobre una mesita fijada en un muelle (fig. 192, *a*). Determinar la compresión máxima l del muelle cuando la bola cae sobre la mesita (fig. 192, *b*), si su rigidez $k = 700$ N/m. Las masas del muelle y la mesita se desprecian.

Solución. La energía potencial de la bola cuando ella se encuentra sobre la mesita, con la mayor compresión del muelle (nivel nulo), será considerada nula. Entonces, la energía potencial de la bola en el momento inicial:

$$E_{p1} = mg(h + l).$$

En ese instante la energía cinética de la bola es nula. Por consiguiente, la energía total E_1 del sistema bola – muelle viene definida en el momento inicial por la energía potencial de la bola:

$$E_1 = E_{p1} = mg(h + l).$$

Cuando la compresión del muelle es máxima, la energía cinética de la bola es igual a cero, mientras que el muelle posee la energía potencial $kl^2/2$. Por este motivo, la energía total E_2 de ese mismo sistema, en el instante en que la compresión del muelle es máxima, será:

$$E_2 = \frac{kl^2}{2}.$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía

$$E_1 = E_2,$$

o bien

$$mg(h + l) = \frac{kl^2}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática y poniendo los valores numéricos de los datos, hallamos que $l \approx 0{,}5$ m.

PROBLEMA 3. Una grúa eleva una carga de masa m desde la altura h_0 hasta h. Con ello, la velocidad de la carga aumenta de $\vec{v}_0$ a $\vec{v}$. ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\vec{F}$ de tensión del cable del que está suspendida la carga?

Solución. En el caso que examinamos, el sistema de cuerpos carga – Tierra no se puede considerar cerrado: además de la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ (fuerza de interacción con la Tierra), sobre la carga actúa la fuerza exterior $\vec{F}$ por parte del cable tensado que no pertenece al sistema. La fuerza total a que está sometida la carga, es igual a $\vec{F} + m\vec{g}$. Como las fuerzas $\vec{F}$ y $m\vec{g}$ están dirigidas en sentido contrario, el trabajo de la resultante de ellas

$$A = (F - mg)(h - h_0).$$

De acuerdo con el teorema de la energía cinética, dicho trabajo A es igual a la variación de la energía cinética de la carga:

$$(F - mg)(h - h_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

De aquí

$$F(h - h_0) = \left(mgh + \frac{mv^2}{2}\right) - \left(mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2}\right).$$

La expresión en el primer miembro de la igualdad es el trabajo de la fuerza exterior, mientras que la que figura en el segundo miembro, la variación de la energía mecánica total del sistema. Así pues, cuando un sistema de cuerpos no es cerrado, su energía mecánica total varía. La variación de esta energía es igual al trabajo realizado por la fuerza exterior. Si designamos por E_0 la energía total del sistema de cuerpos antes de que las fuerzas exteriores produzcan trabajo y por E, después de realizado éste,

$$\boxed{E - E_0 = A.}$$

Si, como sucede con frecuencia, durante la subida la carga se mueve a velocidad constante ($v = v_0$), el trabajo de la fuerza exterior es sólo igual a la variación de la energía potencial del sistema.

¿ ?

1. ¿Qué es la energía mecánica total de un cuerpo?
2. ¿En qué consiste el principio de conservación de la energía mecánica total de un cuerpo, cuando éste se mueve bajo el efecto de la fuerza de gravedad?
3. ¿En qué consiste el principio de conservación de la energía mecánica total de un cuerpo durante su movimiento bajo la acción de la fuerza elástica?
4. ¿Se cumple el principio de conservación de la energía mecánica total de un cuerpo (o sistema de cuerpos) si actúan simultáneamente las fuerzas de gravedad y elástica?
5. Un satélite gira en torno de la Tierra describiendo una órbita circular. Mediante un motor cohete el satélite se ha traspasado a otra órbita. ¿Ha cambiado su energía mecánica total?

Ejercicios 35

1. Un cuerpo cae desde cierta altura sobre la tierra; en el instante en que choca contra ésta su velocidad es de 30 m/s. ¿De qué altura cae el cuerpo?
2. Un proyectil, que al ser disparado del cañón recibió una velocidad inicial de 280 m/s, vuela verticalmente hacia arriba. ¿A qué altura

sobre el lugar del disparo su energía cinética será igual a la potencial?
3. Un cuerpo de masa de 2 kg cae desde una altura de 30 m sobre la tierra. Calcular la energía cinética del cuerpo en el instante en que se halla a una altura de 15 m sobre la tierra y cuando choca con ella.
4. La maza de un martinete, al caer desde una altura de 8 m, posee una energía cinética de 18 000 J. ¿Cuál es la masa de la maza?
5. Al comprimirse, un muelle alargado arrastra un cuerpo de masa de 50 g por un plano horizontal sin rozamiento. En el instante en que la deformación del muelle resulta nula, el cuerpo adquiere una velocidad de 5 m/s. ¿A qué magnitud estaba alargado el muelle, si su rigidez es igual a 10 000 N/m?
6. Un cuerpo de 400 g de masa está fijado en un muelle comprimido, cuya rigidez es igual a 100 N/m. Después de liberar el muelle, el cuerpo realiza tales oscilaciones, con las que el alargamiento máximo del muelle constituye 10 cm. ¿Cuál es la velocidad máxima del cuerpo en oscilación? (Se desprecia el peso del muelle.)
7. Una bola de 50 g de masa se mueve a una velocidad de 10 m/s y choca con una bola inmóvil de 110 g de masa. ¿Cuáles serán las velocidades de ambas bolas después del choque? Se debe considerar que el movimiento transcurre a lo largo de la línea que une los centros de ambas bolas.

   Indicación. Al resolver el problema, hay que hacer uso de los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. La suma de las energías cinéticas y la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento sobre el eje trazado por los centros de las bolas deben ser iguales antes y después del choque.

9.9. Trabajo de la fuerza de rozamiento y energía mecánica

Todavía nos queda por considerar el trabajo de la tercera fuerza mecánica, es decir, de la fuerza de rozamiento de deslizamiento. En condiciones terrestres, la fuerza de rozamiento se manifiesta, de uno u otro modo, en caso de todos los movimientos de los cuerpos. ¿En qué difiere el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento del producido por las demás fuerzas mecánicas?

La fuerza de rozamiento sólo aparece cuando tiene lugar el movimiento relativo de dos cuerpos en contacto. Si uno de ellos se considera inmóvil, la dirección de la fuerza que actúa sobre el otro cuerpo, siempre es contraria a su velocidad. La fuerza de rozamiento no depende de las coordenadas y de la disposición mutua de los cuerpos.

Por este motivo, no podemos representar el trabajo de la fuerza de rozamiento como la variación de cierta energía potencial. Pero aquél puede ser calculado haciendo uso del teorema de la energía cinética:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Como la fuerza de rozamiento está dirigida en contra del vector de velocidad, $v_2 < v_1$ y el trabajo A tiene signo negativo.

Cuando sobre un cuerpo actúa la fuerza de gravedad o la elástica, éste puede moverse *en contra* de la dirección de la fuerza (por ejemplo, así se mueve un cuerpo lanzado hacia arriba) y *en* la dirección de la fuerza (el cuerpo que cae libremente). En el primer caso el trabajo de la fuerza es negativo, en el segundo, positivo. Cuando el cuerpo se mueve "ida y vuelta", el trabajo total es nulo.

Esto mismo no se puede decir sobre el trabajo de la fuerza de rozamiento. Ésta siempre está dirigida en sentido contrario a la velocidad relativa de los cuerpos en interacción. Por esta causa, *el trabajo de la fuerza de rozamiento no es nulo cuando los cuerpos se mueven recorriendo una trayectoria cerrada.*

Si lanzamos un cuerpo hacia arriba, comenzará a moverse en contra de la fuerza de gravedad, la que en este caso realizará trabajo negativo. Por eso su energía cinética disminuirá. Al alcanzar el punto superior de la trayectoria, el cuerpo se parará un instante, después de lo cual comenzará su recorrido inverso hacia abajo.

Si empujamos un cuerpo, que yace sobre una superficie horizontal, comenzará a moverse en contra de la fuerza de rozamiento que con ello surge y que, como la fuerza de gravedad en el ejemplo anterior, realizará trabajo negativo, disminuyendo la energía cinética del cuerpo. Después de pasar cierta distancia el cuerpo asimismo se parará. Pero no "por un instante" como en el ejemplo del cuerpo lanzado hacia arriba. Se parará por completo y ya no se pondrá en movimiento en sentido contrario.

La cuestión radica en que en el primer ejemplo, la energía cinética disminuía gradualmente convirtiéndose en energía potencial que, a continuación, de nuevo se transformaba en cinética. En lo que atañe al caso del movimiento de un cuerpo por un plano horizontal, bajo el efecto de la fuerza de rozamiento, la energía cinética del cuerpo disminuye, pero no se convierte en energía potencial. Por eso, después de la parada, el cuerpo no se pone en movimiento en sentido inverso: no hay energía a cuenta de la cual pudiera realizarse trabajo en caso de semejante movimiento. La energía mecánica del cuerpo en movimiento no se ha transformado en otro tipo de energía mecánica, sino que simplemente desapareció.

LA ENERGÍA MECÁNICA NO SIEMPRE SE CONSERVA. Resulta que cuando un cuerpo está sometido a la acción de la fuerza de rozamiento (por sí sola o junto con otras fuerzas), se viola el principio de conservación de la energía mecánica: la energía cinética disminuye, pero en su lugar no surge la energía potencial. La energía mecánica total disminuye.

Semejante disminución de la energía mecánica total se observa incluso durante el movimiento de un cuerpo que cae hacia la tierra, si la caída transcurre no en el vacío, sino que por el aire. En caso de este movimiento, la energía potencial del cuerpo disminuye en la magnitud mgh, lo mismo que cuando el movimiento transcurre en el vacío. Pero, cuando el cuerpo alcanza la superficie de la tierra, su velocidad será menor que en caso de la caída libre. También será más pequeña su energía cinética, puesto que ella ya no se igualará al decrecimiento de la energía potencial. A cuenta de la energía perdida fue realizado el trabajo en contra de la fuerza de resistencia del aire. Aunque sabemos dónde hemos perdido la energía mecánica, ésta de todos modos ha desaparecido y parece como si se hubiera violado el principio de conservación de la energía.

Claro está, que semejante violación del principio de conservación de la energía sólo es aparente, imaginaria. La cosa consiste en que el rozamiento de un cuerpo con otro siempre acarrea el calentamiento de ambos cuerpos, el aumento de su temperatura. Del curso anterior de física sabemos que la temperatura de los cuerpos queda definida por el movimiento de las moléculas, de las que están constituidos todos los cuerpos y, por lo tanto, de su energía cinética. Por esta razón, durante el calentamiento de los cuerpos en rozamiento aumenta la energía del movimiento de las moléculas o bien, como se suele decir, la ENERGÍA INTERNA DEL CUERPO. ¿No se producirá dicho aumento de la energía interna precisamente a cuenta de la energía cinética de movimiento de todo el cuerpo "perdida"? Minuciosas mediciones han mostrado que, cuando los cuerpos en movimiento disminuyen su energía cinética a causa del influjo de la fuerza de rozamiento, su energía interna (la energía de movimiento de las moléculas en el cuerpo) aumenta en realidad, además en una magnitud exactamente igual a la que disminuyó la energía mecánica. Por lo tanto, aunque esta última energía disminuye, no desaparece sin dejar huellas, sino que simplemente se transforma en la energía de movimiento de las moléculas.

De este modo, hemos llegado a la importantísima conclusión de que es posible no sólo la transformación de la energía potencial en cinética o viceversa. La energía mecánica puede transformarse en formas no mecánicas de energía, por ejemplo, en la energía interna del movimiento de las partículas que constituyen el cuerpo. La energía, precisamente, es admirable porque puede tener distintas formas: cinética, potencial, interna y muchas otras, con las que nos familiarizaremos más adelante. En lo que se refiere al principio de conservación de la energía, éste significa que en un sistema cerrado se conserva la suma de todos los tipos de energía de este sistema. Y siempre que, durante cualquier proceso o fenómeno, se observa la "pérdida" de alguno de los tipos de energía, se puede estar seguro de que en dicho proceso ha aparecido energía de otro tipo.

¿ ?

1. Sobre un cuerpo actúa la fuerza de rozamiento. ¿Puede ser nulo el trabajo de esta fuerza?
2. Si un cuerpo, sobre el que obra la fuerza de rozamiento, vuelve al punto inicial después de recorrer cierta trayectoria, ¿será nulo el trabajo de la fuerza de rozamiento?
3. ¿Cómo varía la energía mecánica de un cuerpo cuando sobre él actúa la fuerza de rozamiento de deslizamiento?

Ejercicios 36

1. Un trineo de 60 kg de masa, después de resbalar cuesta abajo, ha recorrido 20 m por un sector horizontal del camino. Hallar el trabajo de la fuerza de rozamiento en dicho sector, si el coeficiente de rozamiento de los patines del trineo sobre la nieve es igual a 0,02.
2. Con una fuerza de 20 N se aprieta a una piedra de amolar de 20 cm de radio la pieza que se afila. Determinar qué trabajo realiza el motor en el transcurso de 2 min, si la piedra de amolar efectúa 180 rpm y el coeficiente de rozamiento de la pieza con la piedra es 0,3.
3. El chófer de un automóvil desconecta el motor y comienza a frenar 20 m antes del semáforo (la carretera es horizontal). Considerando que la fuerza de rozamiento es igual a 400 N, hallar la máxima velocidad del automóvil bajo la cual éste logrará pararse ante el semáforo, si la masa del vehículo es igual a 1,6 t.

4. Sobre un cuerpo en movimiento por un plano horizontal actúa la fuerza de rozamiento de 100 N en el transcurso de un recorrido de 15 m. ¿En qué magnitud ha variado la energía mecánica del cuerpo? ¿Qué energía precisamente ha cambiado (la cinética o la potencial)?
5. Un paracaidista de 70 kg de masa, después de desprenderse del avión, primero se mueve de manera acelerada y, seguidamente, a partir de una altura $h = 1000$ m y hasta el aterrizaje, uniformemente. ¡Qué trabajo ha realizado la fuerza de resistencia del aire durante el movimiento uniforme?
6. Un cuerpo de 2 kg de masa cae desde una altura de 240 m y penetra en la tierra a una profundidad de 0,2 m. La fuerza de rozamiento del cuerpo sobre la tierra es igual a 10 000 N. ¿Ha realizado el cuerpo una caída libre o se movía por el aire?
7. Una bala de 10 g de masa, que vuela en dirección horizontal a una velocidad de 600 m/s, va a parar a una vigueta de madera de 2 kg de masa y se atasca en ella. Con ello, la bala y la vigueta se calientan. ¿Qué cantidad de energía se emplea para el calentamiento? La fuerza de resistencia del aire se puede despreciar.

Tarea

Citar uno de los múltiples ejemplos, en los que la energía mecánica total de un cuerpo no se conserva.

9.10. Potencia

Recordemos (véase A.V. Piórishkin, N.A. Ródina. Física 1) que toda máquina, utilizada para ejecutar trabajo, se caracteriza por una magnitud especial, llamada POTENCIA.

La potencia de una máquina o mecanismo es igual a la razón entre el trabajo producido y el intervalo de tiempo durante el que fue efectuado.

Si designamos por N la potencia obtendremos

$$N = \frac{A}{t}. \tag{1}$$

De la fórmula (1) vemos que en el SI la unidad de potencia es 1 J/s (JULIO POR SEGUNDO). Semejante unidad recibe un nombre especial: VATIO (W):

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

Esta unidad es relativamente pequeña. En la técnica se hace con frecuencia uso de una unidad 1000 veces mayor que el vatio, a saber, el KILOVATIO (kW). A veces, se emplea una unidad un millón de veces mayor que el vatio, llamada MEGAVATIO (MW).

He aquí un ejemplo. En la central hidroeléctrica Krasnoyárskaya, la más grande del mundo, cada segundo de la presa de 100 m de altura cae un flujo de agua con un volumen de 5000 m^3 o una masa de $5 \cdot 10^6$ kg. Es evidente que la potencia de la central será igual al trabajo que la fuerza de gravedad realiza sobre esta masa de agua en el transcurso de 1 s:

$$N = \frac{mgh}{t} = \frac{m}{t}gh.$$

Tomando en consideración que $m/t = 5 \cdot 10^6$ kg/s, obtenemos:

$$N = 5 \cdot 10^6 \ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m} \approx 5 \cdot 10^9 \ \frac{\text{J}}{\text{s}} = 5 \cdot 10^6 \text{ kW}.$$

Siendo conocida la potencia N, el trabajo A, producido durante el tiempo t, se expresa mediante la fórmula

$$A = Nt.$$

De aquí se desprende que por unidad de trabajo se puede tomar éste realizado durante 1 s siendo la potencia igual a 1 W. Semejante unidad de trabajo recibe el nombre de VATIO-SEGUNDO (W·s):

$$1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ J}.$$

Pero el julio y, asimismo el vatio-segundo, son unidades muy pequeñas. Con mayor frecuencia se utilizan unidades más grandes, o sea, el KILOVATIO-HORA (kW·h) y el MEGAVATIO-HORA (MW·h):

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J},$$
$$1 \text{ MW} \cdot \text{h} = 1\,000\,000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Los aviones, buques, cohetes, automóviles y otros medios de transporte se mueven con frecuencia a velocidad constante. Esto significa, que las fuerzas que sobre ellos actúan, gracias al trabajo del motor, son iguales en módulo y contrarias en dirección a las fuerzas de resistencia. ¿De qué depende la velocidad de movimiento de estos "cuerpos"?

Ahora llegaremos a la conclusión de que la velocidad depende de la potencia del motor.

En efecto, $N = A/t$. Pero $A = Fs$, donde F es el módulo de las fuerzas de resistencia.

Por consiguiente,

$$N = \frac{Fs}{t}.$$

La razón $s/t = v$, donde v es el módulo de la velocidad de movimiento del cuerpo. Por lo tanto,

$$N = Fv, \qquad (2)$$

o bien

$$v = \frac{N}{F}.$$

De esta fórmula se desprende que siendo constante la fuerza de resistencia, la velocidad del cuerpo es proporcional a la potencia del motor. Por esta causa, los trenes y automóviles de alta velocidad necesitan motores de gran potencia. Sin embargo, en la realidad, en muchos casos la fuerza de resistencia no es constante, sino que crece al aumentar la velocidad.

En el quinto capítulo (5.6) vimos que a grandes velocidades, con las que se mueven los buques y aviones, la fuerza de resistencia del aire y del agua (el rozamiento interno o liquido) es proporcional al cuadrado de la velocidad. Esto puede ser expresado por la fórmula $F = \beta v^2$, donde β (letra griega "beta") es el coeficiente de proporcionalidad.

Poniendo en la fórmula (2) en lugar de F la magnitud βv^2, obtenemos para la potencia la expresión

$$N = \beta v^3.$$

Asi pues, la potencia de los motores de aviación y de barco es proporcional no a la primera potencia, sino que al cubo de la velocidad. Por ejemplo, si queremos aumentar dos veces la velocidad de un avión, la potencia de sus motores debe ser aumentada ocho veces. He aquí la causa de que cueste tanto trabajo cada nuevo éxito en el aumento de la velocidad de los aviones, buques y otros medios de transporte.

De la fórmula $F = N/v$ también se deduce que cuando la potencia N del motor es constante, la fuerza aplicada al cuerpo en movimiento gracias al trabajo del motor, es mayor a pequeñas velocidades que a grandes. Precisamente por esta causa, los chóferes de los automóviles al subir a la montaña, cuando es necesaria la máxima fuerza de tracción, cambian la marcha del motor pasando a pequeñas velocidades.

PROBLEMA 1. ¿Qué potencia media desarrolla un hombre, cuya masa es de 70 kg, si sube una escalera de 10 m de altura en 15 s?

Solución. Al subir un hombre por la escalera, se realiza el siguiente trabajo en contra de la fuerza de gravedad

$$A = mgh.$$

Por lo tanto, la potencia que desarrolla el hombre es

$$N = \frac{mgh}{t}.$$

Poniendo en esta fórmula los valores numéricos dados en el planteamiento del problema, obtenemos:

$$N = \frac{70\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{m}}{15\ \text{s}} = 460\ \text{W}.$$

PROBLEMA 2. ¿La carga de qué masa puede elevar una grúa con motor de 12 kW de potencia a una velocidad de 90 m/min?

Solución. De la fórmula para la potencia

$$N = Fv$$

se puede expresar la fuerza con la que la grúa actúa sobre la carga que se eleva:

$$F = \frac{N}{v}.$$

Pero cuando la elevación es uniforme esta fuerza es de modulo igual a mg.

Por esto

$$mg = \frac{N}{v}$$

o bien

$$m=\frac{N}{vg}.$$

Poniendo en esta fórmula los valores numéricos expuestos en el planteamiento del problema, obtenemos:

$$m=\frac{12\,000\ \mathrm{W}}{9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\approx 800\ \mathrm{kg}.$$

¿ ?

1. ¿Qué es la potencia?
2. ¿A qué magnitudes se refiere la potencia, a las escalares o bien vectoriales?
3. ¿De qué depende la velocidad del movimiento uniforme de un cuerpo accionado por un motor?
4. ¿Qué unidades de potencia se utilizan en la técnica y en la vida cotidiana? ¿Qué correlaciones existen entre ellas?
5. ¿A qué magnitud pertenece la unidad kilovatio-hora?

Ejercicios 37

1. Un avión vuela en movimiento rectilíneo y uniforme a una velocidad de 900 km/h. ¿Cuál es la fuerza de resistencia al avance, si la potencia que desarrollan sus motores es igual a 1800 kW?
2. Una grúa con motor de 8 kW eleva una carga a velocidad constante de 6 m/min. ¿Cuál es la masa de la carga?
3. En un torno se maquina un árbol. La potencia que desarrolla el motor del torno es igual a 3 kW. ¿Qué trabajo se realiza en este caso, si el árbol se labra en 2 min?
4. ¿Qué trabajo se realiza en una central hidroeléctrica durante un año, si la potencia media de los generadores es igual a 2,5 MW?
5. Un automóvil de 2000 kg de masa se mueve por una carretera horizontal a una velocidad de 72 km/h. La fuerza de resistencia al movimiento constituye 0,05 del peso del vehículo. Determinar qué potencia desarrolla en este caso el motor.

9.11. Transformaciones de energía y utilización de las máquinas

Han pasado ya casi doscientos años desde que el hombre empezó a utilizar extensamente toda clase de máquinas. El movimiento de éstas se anima con motores, los que a su vez reciben la energía de una u otra fuente.

Desde el punto de vista de mecánica, el empleo de las máquinas se reduce a que, con su ayuda, ciertas fuerzas realizan trabajo. Pero realizar trabajo significa consumir energía en una cantidad, por lo menos, igual a dicho trabajo. En nuestro tiempo los tipos fundamentales de energía, a cuenta de la que se ejecuta el trabajo, es la que se libera al quemar el combustible (carbón, petróleo, gas), la energía de la caída del agua y la llamada energía nuclear, que se obtiene en los reactores nucleares. De todos estos tipos de energía, ninguno de ellos se transmite directamente a las máquinas.

Al dirigirse a las máquinas, en las que se efectúa el trabajo, la energía sufre una serie de transformaciones de una a otra forma. Por ejemplo, la energía de la reacción de las partículas del combustible con el oxígeno (energía potencial) se convierte, primero, en la energía interna de aquellas partículas que se forman durante la combustión. A continuación, esta energía, en forma de calor, se transmite al vapor de agua y de éste a la turbina de vapor que pone en movimiento el generador eléctrico. En este último la energía mecánica de rotación se transforma en la energía de la corriente eléctrica. Así funciona una central termoeléctrica. Desde el generador de la central eléctrica, la energía se transmite por cables a los electromotores, instalados en la infinita cantidad de máquinas-herramientas y otros dispositivos. La energía en los electromotores de nuevo se transforma en energía mecánica que mediante diversos mecanismos de transmisión, por ejemplo, palancas, planos inclinados, tornillos, poleas, se comunica a las máquinas-herramientas y a otras.

Hemos aducido aquí la cadena de transformaciones que sufre la energía "recorriendo el camino" desde el hogar de la central termoeléctrica hasta la máquina. A esto hay que añadir que el propio combustible apareció en la Tierra como resultado de una complicada cadena de transformaciones de energía, cuyo principio se halla en el Sol, manantial de la vida en nuestro planeta.

Para nosotros, lo importante aquí consiste en que estas transformaciones (hemos enumerado sólo algunas de ellas) están subordinadas al principio de conservación de la energía, del que se desprende que para cualesquiera transformaciones es imposible obtener mayor cantidad de la energía de un tipo, que la gastada de otro tipo. En ningún motor se puede obtener mayor energía mecánica que la eléctrica o interna consumida. No puede existir un motor en el que el trabajo producido sea mayor que la energía consumida.

A la inversa, en los motores reales, una parte de la energía se pierde inevitablemente a causa de la fuerza de rozamiento. Se pierde en el sentido de que parte de la energía, a consecuencia del trabajo de la fuerza de rozamiento, transfórmase en energía interna y conduce al calentamiento del motor. Del mismo modo, el trabajo realizado por las fuerzas, que actúan sobre la máquina, siempre es algo menor que la energía consumida.

SOBRE LOS "MÓVILES PERPETUOS". Todo lo dicho con anterioridad sólo fue conocido a mediados del siglo XIX, cuando se descubrió el principio de conservación de la energía. Hasta aquel entonces, en el transcurso de siglos realizáronse obstinados intentos de crear una máquina que permitiera ejecutar mayor cantidad de trabajo que la energía consumida. Ella recibió de antemano el nombre de "móvil perpetuo" (*perpetuum mobile*). Pero semejante máquina nunca fue, y no puede ser, creada.

En la fig. 193 se muestra el esquema de uno de los múltiples proyectos del "móvil perpetuo". Consta de dos ruedas (poleas) instaladas en la parte superior e inferior de una torre llena de agua. Por las poleas se tiende un cable sin fin al que están unidos con cierto intervalo ligeros cajones huecos. Como vemos en la figura, en cada momento de tiempo, parte de los cajones está sumergida en el

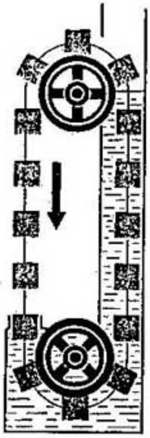


Fig. 193

agua, mientras que otra parte se encuentra en el aire. El autor del proyecto aseguraba que los cajones derechos (en la figura) al emerger bajo la acción de la fuerza de Arquímedes (de empuje) obligarán a que las ruedas giren. A cambio de los cajones que emergen, otros se sumergen en el agua, manteniendo el movimiento "perpetuo". Las ruedas en rotación pueden accionar el movimiento de generadores eléctricos, ofreciendo así energía "gratuita" en cantidad ilimitada, ya que el dispositivo funciona "perpetuamente".

No obstante, en la realidad, en el proyecto hay errores y semejante motor no puede funcionar. La cuestión radica en que si unos cajones emergen, otros, a la inversa, entran en el agua y deben ejecutar trabajo en contra de la fuerza de Arquímedes. Además, ellos penetran en el agua por abajo, donde sobre ellos actúa la presión de toda la columna de agua, siendo la fuerza de esta presión mayor que la fuerza de empuje.

Errores similares pueden ser hallados en cualquier proyecto del "móvil perpetuo". Los intentos de crear un dispositivo de este tipo están condenados al fracaso, ya que el principio de conservación de la energía "prohíbe" la obtención de una cantidad de trabajo mayor que la energía consumida.

Es curioso indicar que incluso en nuestros días siguen apareciendo "inventores" que no abandonan los vanos intentos de crear móviles perpetuos.

La tarea de la técnica consiste no en tratar de eludir el principio de conservación de la energía, sino en reducir las pérdidas de energía en las máquinas, motores, generadores.

¿ ?

1. ¿Para qué sirven los generadores, motores, máquinas?
2. ¿En qué consiste la idea del "móvil perpetuo"? ¿Por qué esta idea es irrealizable?
3. ¿Qué transformaciones de la energía se producen al disparar un fusil; al lanzar un cohete?

9.12. Rendimiento

Cuando en cierta máquina se realiza trabajo a cuenta de la energía consumida, hay que distinguir el llamado TRABAJO ÚTIL DEL TRABAJO TOTAL REALIZADO.

El trabajo útil es aquel para el que fue creada y se emplea la máquina. Por ejemplo, para una grúa es el trabajo de elevación de la carga, para un torno, el trabajo contra las fuerzas de rozamiento del artículo que se maquina con la cuchilla, etc.

Pero en toda máquina, en cualquier motor, el trabajo útil siempre es menor que el trabajo total, ya que en todo momento existen fuerzas de rozamiento, cuyo trabajo negativo conduce al calentamiento de diversas partes de la máquina o el motor. El calentamiento no puede ser considerado en calidad de resultado útil del funcionamiento de la máquina, utilizada para ejecutar trabajo mecánico. El calentamiento es motivo de que parte de la energía transmitida al motor no se transforme en mecánica, sino que en energía interna que, por regla, no puede ser empleada para efectuar trabajo.

Por esta razón cada máquina, motor o mecanismo, se caracteriza por una magnitud especial que muestra la eficacia con la que aquéllos utilizan la energía que se les comunica. Recordemos (véase A. V. Piórishkin, N. A. Ródina. Física 1) que dicha magnitud se llama RENDIMIENTO.

También podemos hablar del rendimiento de un generador, en el que una forma de energía se convierte en otra. Por ejemplo, en el generador eléctrico la energía mecánica se transforma en el trabajo de la corriente eléctrica. A consecuencia del trabajo de las fuerzas de rozamiento y por otras causas, el trabajo de la corriente eléctrica es siempre algo menor que la energía mecánica que consume la turbina.

Recibe el nombre de rendimiento de un generador la razón entre el trabajo útil obtenido y la energía consumida.

El rendimiento no puede ser mayor que la unidad. En las máquinas, motores y generadores reales aquél siempre es menor que la unidad a causa de las pérdidas irremediables de energía provocadas, ante todo, por el trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento. Pero además existen otras causas, no mecánicas, de pérdida de energía.

Remarquemos una vez más que la palabra "pérdida" no significa que la energía desaparece. Sólo quiere decir, que parte de ella se convierte no en lo que es necesario y se pierde para su empleo útil.

El rendimiento se expresa en tanto por ciento. Si designamos el rendimiento por η (letra griega "eta"), el trabajo útil (o bien la energía) por $A_{út}$, el trabajo total realizado (o la energía consumida) por A_{con}, obtenemos

$$\eta = \frac{A_{út}}{A_{con}} \cdot 100\%.$$

PROBLEMA 1. Una grúa se acciona con un motor de 10 kW de potencia. ¿Cuánto tiempo se necesita para elevar a una altura de 50 m una carga de 2 t de masa, si el rendimiento del motor es igual a 75%?

Solución. Con ayuda de la grúa se debe realizar el siguiente trabajo útil:

$$A_{\text{út}} = mgh.$$

Todo el trabajo realizado A_{con} se expresa por la fórmula

$$A_{\text{con}} = Nt,$$

donde N es la potencia del motor; t, el tiempo de trabajo de la grúa.

De acuerdo con el planteamiento del problema, sólo el 75% del trabajo que se realiza en el motor se emplea con utilidad. Por eso,

$$A_{\text{út}} = 0{,}75Nt.$$

De donde

$$t = \frac{A_{\text{út}}}{0{,}75N} = \frac{mgh}{0{,}75N}, \quad t = \frac{2000\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50\ \text{m}}{0{,}75 \cdot 10^4\ \frac{\text{J}}{\text{s}}} \approx 130\ \text{s}.$$

PROBLEMA 2. Un automóvil de 2 t de masa, con los frenos accionados, desciende a velocidad constante por una carretera de montaña y pasa un sector del recorrido bajando 80 m, según la altura. ¿Qué cantidad de energía Q se ha desprendido en los frenos?

Solución. Si los frenos no estuvieran en acción, el decrecimiento de la energía potencial sería igual al crecimiento de la energía cinética. Pero como el automóvil se movía a velocidad constante, dicha energía durante la bajada no aumentó. Por consiguiente, toda la energía potencial perdida se convirtió en interior, o sea,

$$Q = mg(h_1 - h_2).$$

Poniendo los valores numéricos, obtenemos

$$Q = 2000\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 80\ \text{m} = 1{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

¿ ?

1. ¿Qué serie de transformaciones de la energía conduce al desprendimiento de calor en un hornillo eléctrico, si la energía eléctrica se transmite a la red desde una central hidroeléctrica? Se debe comenzar por el Sol.
2. Un cuerpo ha caído a la Tierra desde cierta altura. ¿En qué se ha convertido su energía potencial?
3. Un herrero elevó el martillo y golpeó sobre una pieza colocada en el yunque. ¿Qué transformaciones de energía tienen lugar en este caso?
4. Un muelle metálico deformado se sumerge en un ácido que diluye el metal del que está hecho el muelle. ¿En qué se convirtió la energía potencial del muelle después de diluirse éste?

Ejercicios 38

1. Una grúa se acciona por un motor de 7,36 kW de potencia. Determinar la masa de la carga que eleva la grúa, a una velocidad de 6 m/min, si el rendimiento del motor es igual al 80%.
2. Un avión vuela de modo rectilíneo y uniforme a una velocidad de 800 km/h. Hallar el empuje de los motores, si la potencia de éstos es

igual a 1800 kW. Considerar el rendimiento igual al 70%.

3. Una bomba con motor de 3 kW de potencia, eleva el agua de un pozo de 20 m de profundidad. Determinar la masa de agua que se eleva en el transcurso de 2 h, si el rendimiento de la bomba es el 70%.
4. De la presa de una central hidroeléctrica con 30 m de altura, caen por segundo 170 t de agua. La potencia eléctrica que proporciona la central es igual a 10 MW. ¿Cuál es el rendimiento de la transformación de la energía del agua que cae en energía eléctrica?

9.13. Movimiento de un líquido por tubos. Ley de Bernoulli

En este parágrafo haremos uso del principio de conservación de la energía, en lo que atañe al movimiento de un líquido o gas por tubos. En la vida cotidiana y en la técnica, con el movimiento de un líquido por tubos se tropieza frecuentemente. Por tubos se alimenta el agua a nuestras casas, a los lugares de su consumo. En las máquinas el aceite para el engrase, el combustible a los motores se alimenta por tubos, etc. A menudo, en la naturaleza también vemos el movimiento de líquidos por tubos. Es suficiente mencionar la circulación de la sangre de los animales y el hombre, consistente en el flujo de la sangre por tubos, es decir, por los vasos sanguíneos. Hasta cierto grado, la corriente del agua por el cauce de los ríos, también es una variedad de flujo de un líquido por tubos. El cauce de un río es un tubo peculiar para la corriente del agua.

Como sabemos, de acuerdo con la ley de Pascal, un líquido *inmóvil* en un recipiente transmite sin variación la presión exterior en todas las direcciones y hacia todos los puntos del volumen. Sin embargo, cuando el líquido fluye *sin rozamiento* por un tubo con diferente área de la sección transversal en distintos sectores, como muestra la práctica, la presión a lo largo del tubo no es la misma. Aclaremos la causa de la dependencia entre la presión de un líquido *en movimiento* y el área de la sección transversal del tubo. Pero, para empezar, estudiemos una importante singularidad de todo flujo de líquido.

VELOCIDAD DE UN LÍQUIDO Y SECCIÓN DEL TUBO. Supongamos que un líquido fluye por un tubo horizontal, cuya sección es distinta en diversos lugares, por ejemplo, por el tubo, parte del cual viene mostrada en la fig. 194.

Si trazásemos mentalmente a lo largo del tubo varias secciones, con las áreas S_1, S_2, S_3, respectivamente, y midiéramos el volumen del líquido que pasaría por cada una de ellas durante cierto intervalo de tiempo t, advertiríamos que por cada una de las secciones fluiría un mismo volumen de líquido. Esto significa que todo el líquido que durante el tiempo t pasa por la primera sección, en el mismo intervalo de tiempo pasa por la tercera, aunque

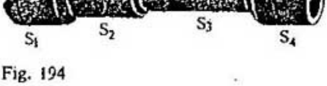


Fig. 194

Fig. 195

ésta en cuanto a su área es mucho menor que la primera. Si esto no fuera así y por la sección de área S_3 en el lapso t, por ejemplo, pasara menos líquido que por la sección de área S_1, el exceso de líquido debería acumularse en cierto lugar. Pero el líquido después de llenar el tubo no tiene lugar para acumularse.

¿Cómo puede un líquido, que fluyó por la sección ancha, pasar en ese mismo intervalo de tiempo por la estrecha? Es evidente, que al pasar por las partes angostas del tubo, la velocidad de movimiento debe ser precisamente tantas veces mayor, cuantas veces es menor el área de la sección.

En efecto, examinemos cierta sección de la columna de líquido en movimiento, que en el momento inicial de tiempo coincide con una de las secciones del tubo (fig. 195). Durante el tiempo t este área se desplazará a una distancia l, que es igual a vt, donde v es el módulo de la velocidad de la corriente del líquido. El volumen V del líquido, que ha pasado por la sección del tubo, es igual al producto del área de esta sección por la longitud l:

$$V = Sl,$$

o bien

$$V = Svt. \tag{1}$$

En la unidad de tiempo fluye un volumen de líquido V/t; esta magnitud recibe el nombre de FLUJO DEL LÍQUIDO. De la fórmula (1) sigue que éste se puede expresar así:

$$\frac{V}{t} = Sv.$$

El flujo del líquido, que pasa por la sección de un tubo, es igual al producto del área de la sección transversal del tubo por la velocidad de la corriente.

Como acabamos de ver, este flujo debe ser el mismo en diversas secciones del tubo. Por esta razón, cuanto menor sea la sección del tubo, tanto mayor será la velocidad de movimiento.

Tanto líquido como pasa por una sección de un tubo en el transcurso de cierto intervalo de tiempo, debe pasar durante ese mismo tiempo por cualquier otra sección.

Con ello, consideramos que la masa dada del líquido, siempre tiene el mismo volumen, que el líquido no puede comprimirse y reducir su volumen (de los líquidos dicen que son *incompresibles*). Es bien conocido, por ejemplo, que en los lugares angostos de los ríos, la velocidad con que fluye el agua es mayor que en los anchos. Si designamos la velocidad del flujo de un líquido en las secciones S_1, S_2, S_3, S_4 por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, podemos escribir:

$$S_1v_1 = S_2v_2 = S_3v_3 = S_4v_4. \tag{2}$$

VELOCIDAD Y PRESIÓN. De la correlación (2) vemos que al pasar el líquido del sector del tubo de mayor área al sector con área menor, la velocidad del flujo crece, es decir, *el líquido se mueve con aceleración*, lo que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, quiere decir que *sobre el líquido actúa cierta fuerza*. ¿Qué fuerza es ésta?

Esta fuerza sólo puede ser la diferencia entre las fuerzas de presión en los

Daniel Bernoulli (1700–1782) – matemático y mecánico. Desde 1725 hasta 1733 trabajó en la Academia de Ciencias de Rusia, donde, además de las matemáticas y la física, se ocupaba también de fisiología. En Rusia escribió el libro "Hidrodinámica", en el que ofreció la deducción de la ecuación que describe el movimiento de un líquido perfecto, conocida con el nombre de ley de Bernoulli.

sectores ancho y estrecho del tubo. De este modo, en el sector ancho la presión del líquido debe ser mayor que en el estrecho.

Esto mismo también se desprende del principio de conservación de la energía.

En realidad, si en los lugares estrechos del tubo aumenta la velocidad de movimiento del líquido, también crece su energía cinética. Y como hemos admitido que el movimiento del líquido transcurre sin rozamiento, dicho incremento de la energía cinética debe ser compensado con la disminución de la energía potencial, ya que la energía total debe mantenerse constante. ¿De qué energía potencial se trata? Si el tubo es horizontal, la energía potencial de interacción con la Tierra es igual en todas las partes del tubo y no puede variar. Esto significa, que sólo queda la energía potencial de la interacción elástica. La fuerza de presión, que obliga al líquido a fluir por el tubo, es la fuerza elástica de compresión del líquido. Cuando decimos que un líquido es incompresible, sólo tenemos en cuenta que él no puede ser comprimido hasta tal grado, con el que varíe notoriamente su volumen, pero una pequeña compresión, que provoca la aparición de fuerzas elásticas, se produce inevitablemente. Estas fuerzas crean la presión del líquido. Justamente dicha compresión de éste disminuye en los lugares estrechos del tubo, compensando el aumento de la velocidad. Por esta causa, en los lugares angostos de los tubos la presión del líquido debe ser menor que en los anchos.

En esto consiste la ley descubierta por el académico de Petersburgo, DANIEL BERNOULLI.

La presión de un líquido en movimiento es mayor en aquellas secciones del flujo, en las que su velocidad es menor y, viceversa, en aquellas secciones donde la velocidad es mayor, la presión es menor.

Por muy raro que esto parezca, cuando un líquido pasa por los sectores estrechos del tubo, su compresión no aumenta, sino que disminuye. Esto se confirma por la práctica. Recordemos una vez más que en el líquido en reposo la presión es igual en todo lugar.

Si un tubo por el que fluye un líquido se equipa con tubos abiertos, soldados al primero, es decir, con MANÓMETROS (fig. 196), se podrá observar la distri-

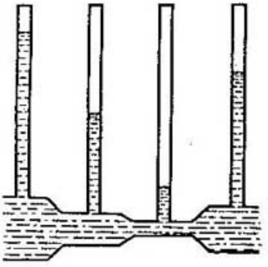


Fig. 196

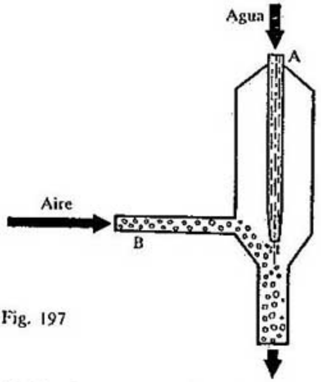


Fig. 197

bución de la presión a lo largo del tubo. En los lugares estrechos de éste, la altura de la columna del líquido en el tubo manométrico será menor que en los anchos. Esto significa, que en los primeros la presión es menor.

Cuanto menor sea la sección del tubo, mayor será en ella la velocidad del flujo y más pequeña la presión. Es evidente, que puede ser elegida una sección tal en la cual la presión resulte igual a la atmosférica exterior (la altura del nivel del líquido en el manómetro será igual a cero). Si la sección se toma aún menor, la presión del líquido en ella será inferior a la atmosférica.

Tal líquido fluyente puede utilizarse para la evacuación (succión) del aire. Éste es el principio de funcionamiento de la bomba llamada A CHORRO DE AGUA. En la fig. 197 viene representado el esquema de una bomba de este tipo. El chorro de agua se hace pasar por el tubo *A*, que en su extremo tiene un pequeño orificio. La presión del agua en este último es menor que la atmosférica. Por esta causa, el gas del volumen que se bombea se aspira por el tubo *B* hacia el extremo del tubo *A* y se evacua junto con el agua.

Todo lo dicho, acerca del movimiento de un líquido por tubos, también se refiere al movimiento de un gas. Si la velocidad del flujo del gas no es muy grande (menor que la del sonido en un gas) y éste no se comprime hasta tal grado que su volumen varíe y, además, si es despreciado el rozamiento, la ley de Bernoulli es asimismo justa para los flujos de gas. En las partes estrechas de los tubos, donde el gas se mueve a mayor velocidad, su presión es menor que en los sectores anchos y ésta puede ser menor que la atmosférica. En algunos casos incluso se puede prescindir de tubos para que se manifieste tal fenómeno.

Podemos realizar el siguiente experimento sencillo. Si soplamos hacia una hoja de papel a lo largo de su superficie, como se muestra en la fig. 198, veremos que el papel se desplazará hacia arriba, lo que sucede a causa de la reducción de la presión en el chorro de aire sobre el papel.

Este mismo fenómeno tiene lugar durante el vuelo de un avión. La corriente de aire al encuentro, incide sobre la cara superior del ala del avión en vuelo y

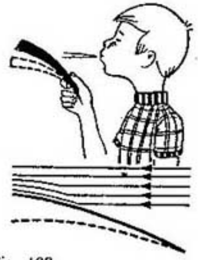


Fig. 198

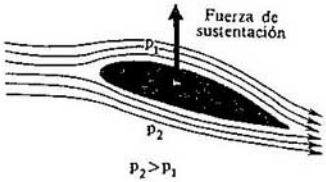


Fig. 199

a cuenta de esto reduce la presión. Sobre el ala ésta resulta menor que debajo de ella (fig. 199). Justamente por esta causa, surge la fuerza sustentadora del ala. La teoría del ala fue confeccionada por el eminente científico ruso N. E. ZHUKOVSKI, a quien V. I. Lenin llamó "padre de la aviación rusa".

¿ ?

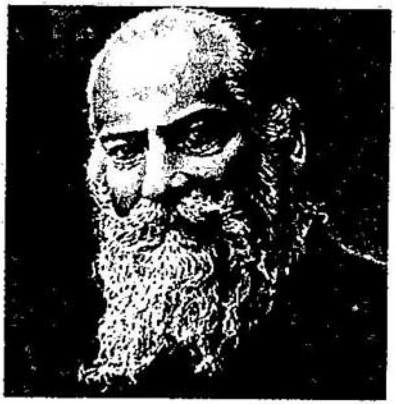
1. ¿A qué es igual el volumen de un líquido que pasa por un tubo en la unidad de tiempo?
2. ¿Por qué en las partes estrechas de una tubería la velocidad del líquido (o gas) es mayor que en las anchas?
3. ¿En qué consiste la ley de Bernoulli?
4. ¿Qué fuerza provoca el aumento de la velocidad de un líquido y, por consiguiente, de su energía cinética al pasar aquél de la parte ancha a la estrecha de una tubería?
5. ¿Se puede considerar que la ley de Bernoulli es un corolario del principio de conservación de la energía?

Ejercicios 39

1. La velocidad tolerable con que fluye el petróleo por los tubos es igual a 2 m/s. ¿Qué volumen de petróleo pasa por un tubo de 1 m de diámetro en el transcurso de una hora?
2. ¿Cuál tiene que ser el diámetro de una tubería por la que han de pasar 5600 m^3 de agua por hora? La velocidad tolerable de la corriente es igual a 2,5 m/s.
3. ¿Cuál ha de ser el diámetro de un tubo con el que hay que sustituir otro de 8 cm de diámetro para que la velocidad de la corriente del líquido sea dos veces mayor?

Tarea

Medir la cantidad de agua que corre del grifo de agua durante un tiempo determinado t. Determinar la velocidad de la corriente de agua, midiendo el diámetro del tubo dispuesto delante del grifo.



Nicolay Egórovich Zhukovski (1847–1921).

9.14. Acerca de la importáncia de los principios de conservación

Los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, que hemos estudiado en los dos últimos capítulos, no sólo tienen un profundo sentido físico, sino que también filosófico. Éstos significan que el movimiento de la materia no puede ni ser destruido ni creado de nuevo.

En efecto, cuando un cuerpo en movimiento se para, parece que es posible decir que su movimiento ha desaparecido. Cuando un cuerpo en reposo se pone en movimiento, podemos llegar a la conclusión de que ha surgido un movimiento que antes no había. Pero los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía muestran que esto no es así. La cuestión reside en que si el cuerpo se detuvo, esto se produjo no sin causa. La parada fue provocada por la acción de cierto otro cuerpo, por el efecto de alguna fuerza. Si ésta es la de rozamiento, quiere decir que en lugar del movimiento mecánico desaparecido ha surgido otro movimiento, el de las partículas en el interior del cuerpo. Cuando la causa de la parada es la fuerza de gravedad o la elástica, en lugar de un movimiento mecánico aparece otro, el de un cuerpo al que el cuerpo que se paró transmitió su cantidad de movimiento y energía, o bien el movimiento de ese mismo cuerpo en dirección contraria.

De este modo, el movimiento puede cambiar su forma, puede ser transmitido de un cuerpo a otro, pero durante todas estas variaciones se cumplen los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía. En la naturaleza no puede haber fenómenos y procesos en los que tales características del movimiento, como la energía y la cantidad de movimiento, surjan y desaparezcan sin ser compensadas. Esto significa que *se conserva el movimiento de la materia.*

Hemos visto que los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía permiten resolver los problemas de mecánica, cuando por diferentes motivos son desconocidas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos. Pero la importancia de los principios de conservación no se limita en lo dicho. Partiendo de nuestros conocimientos actuales, podemos decir que los indicados principios son en absoluto precisos. Esto no se puede decir, por ejemplo, de las segunda y tercera leyes de Newton. Como es sabido, si las partículas se mueven a velocidades próximas a la de la luz, las leyes de Newton adquieren otra forma. Desde este punto de vista, las leyes de Newton son aproximadas. Para los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía no hay exclusiones. Si alguien dice que ha descubierto un fenómeno o proceso para el cual no se cumplen los principios de conservación, podemos afirmar sin vacilación, que ello es un error.

Los principios de conservación son la estrella polar al examinar cualesquiera problemas relacionados con el estudio de la naturaleza. Son una especie de control primario de que cualquier afirmación es correcta. En todos los apartados de física haremos frecuente uso de los principios de conservación.

Lo más importante del noveno capítulo

El trabajo de una fuerza es una magnitud escalar igual al producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento del cuerpo y por el coseno del ángulo entre las direcciones de los vectores de fuerza y de desplazamiento. El trabajo es positivo si el ángulo es agudo y negativo, al ser éste obtuso.

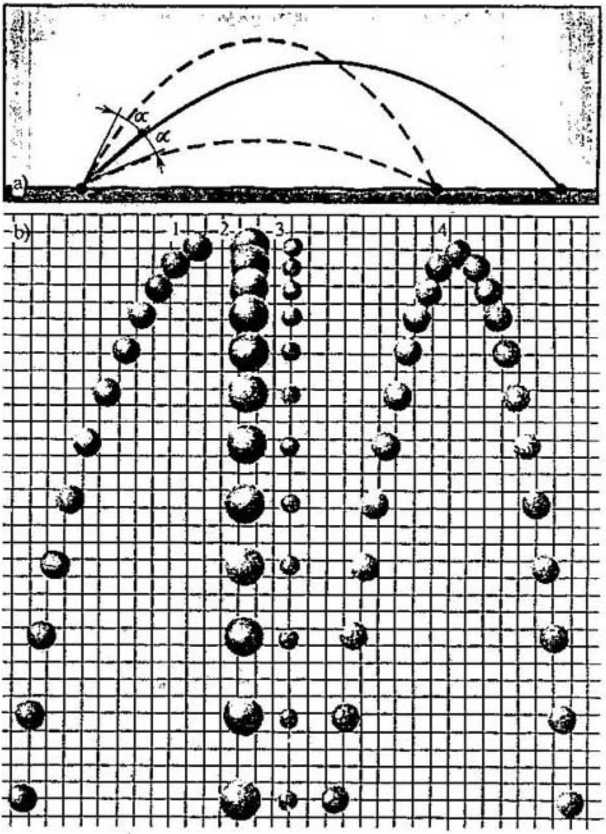
Sólo cuando una fuerza está aplicada a un cuerpo en movimiento, podemos hablar del trabajo de ella. Si sobre un cuerpo *en movimiento* se aplican varias fuerzas, cuya suma vectorial es nula (el cuerpo está en movimiento uniforme), la suma algebraica de todos los trabajos de las fuerzas es igual a cero, pero el trabajo de cada una de las fuerzas no es nulo (salvo aquellas fuerzas, cuya dirección es perpendicular al desplazamiento).

Si sobre un cuerpo actúan fuerzas, cuya resultante no es igual a cero, como resultado de la acción de estas fuerzas variará la magnitud $mv^2/2$ que caracteriza el movimiento y que recibe el nombre de ENERGÍA CINÉTICA del cuerpo. Su variación es igual al trabajo de la resultante de las fuerzas.

Si sobre el cuerpo actúa la fuerza de gravedad (en general, la fuerza de la gravitación universal) o bien una fuerza elástica, la variación de la energía cinética va acompañada de la modificación de la ENERGÍA POTENCIAL, igual en módulo y de signo contrario. En el caso de la fuerza de gravedad, la energía potencial respecto de un nivel nulo convencional, es igual a mgh, donde h es la altura del cuerpo sobre dicho nivel. En el caso de la fuerza elástica, la energía potencial es igual a $kx^2/2$.

Durante la interacción de los cuerpos mediante las fuerzas de gravedad o elástica, las variaciones de la energía cinética y potencial son iguales en módulo, pero de signo contrario. Por eso para un sistema cerrado de cuerpos en interacción se cumple el PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA TOTAL.

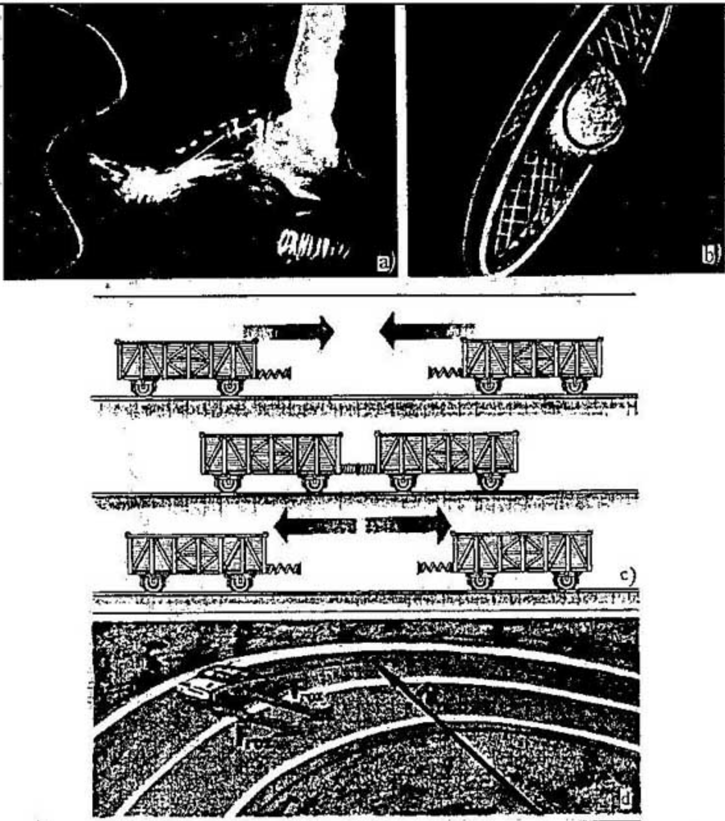
Si, además de las fuerzas de gravedad y elástica, actúa también la fuerza de rozamiento, la energía mecánica total no se conserva. Parte de ella se convierte en energía interna de aquellos cuerpos que están sometidos al efecto de la fuerza de rozamiento.



I

a) Trayectoria de movimiento de un cuerpo lanzado con cierto ángulo hacia el horizonte. Al no haber resistencia del aire, un proyectil lanzado por un cañón volaría describiendo una parábola. La distancia máxima de vuelo se alcanzaría siendo el ángulo de lanzamiento del proyectil igual a 45°. Siendo los ángulos $45° - \alpha$ y $45° + \alpha$, la distancia de vuelo sería la misma.

b) Los dibujos han sido hechos sobre la base de fotografías estroboscópicas del movimiento de bolas metálicas bajo la acción de la fuerza de gravedad: la bola *1* fue lanzada de forma horizontal; las bolas *2* y *3* caían libremente, mientras que la bola *4* fue lanzada formando cierto ángulo con el horizonte.



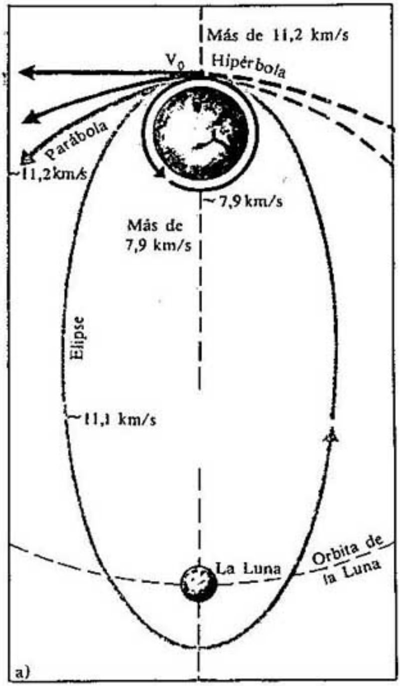
11

a) En la figura vemos la radiografía del pie de un futbolista y del balón, en el momento cuando el primero golpea sobre el segundo. Se ve la deformación del hueso del pie. La fuerza elástica, que actúa sobre el balón, surge como resultado de la deformación de la bota.

b) Figura hecha sobre la base de la fotografía de una raqueta y una pelota para jugar al tenis, en el momento que se golpea sobre ella.

c) Durante el choque de dos cuerpos surgen fuerzas elásticas que conducen a la variación de las velocidades de dichos cuerpos.

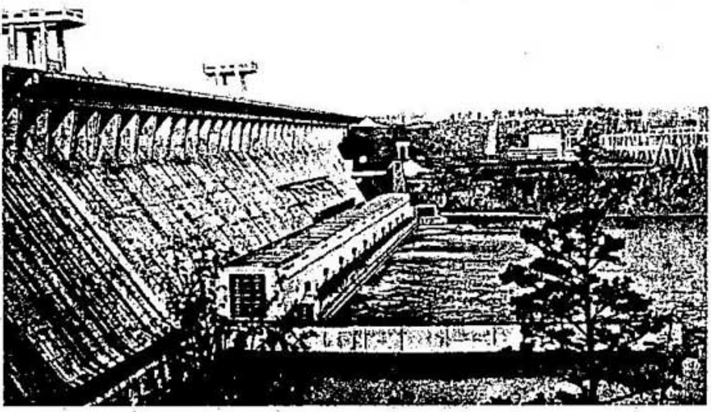
d) En una curva de la carretera el automóvil se mueve con aceleración centrípeta, provocada por la fuerza de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ entre las cubiertas de las ruedas y la superficie de la carretera.

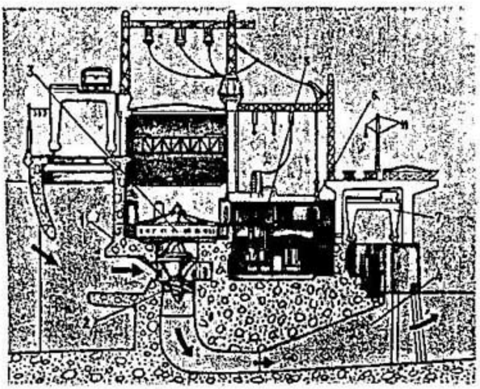


b)

111

a) Velocidades cósmicas. Si la velocidad de la nave cósmica es igual a $v_0 \approx 7{,}9$ km/s y está dirigida paralelamente a la superficie de la Tierra, dicha nave se convierte en satélite de nuestro planeta, describiendo una órbita circular a una altura relativamente pequeña de la Tierra. A una velocidad entre 7,9 y 11,1 km/s, la órbita de la nave será elíptica. A la velocidad de 11,2 km/s la nave se moverá por una parábola, mientras que a mayor velocidad, por una hipérbola.
b) Lanzamiento de un cohete.



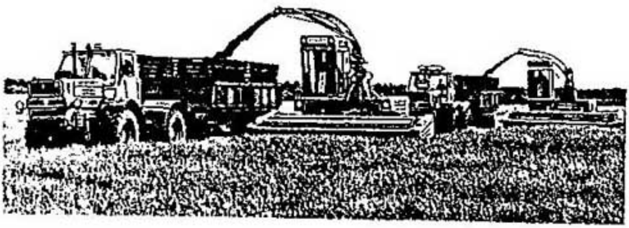


IV
Arriba – fotografía de una central hidroeléctrica moderna. Abajo – corte esquemático de la central. Durante su caída desde el nivel superior al inferior, la energía potencial del agua se transforma en energía cinética. Cuando el agua pasa por la turbina su energía cinética se transmite al rodete de la turbina y al generador ligado a ella. (En la figura se han marcado con cifras: *1* – cámara de la turbina; *2* – hidroturbina; *3* – hidrogenerador; *4* – tubo de aspiración; *5* – dispositivos de distribución (eléctricos); *6* – transformador; *7* – grúas de pórtico.)

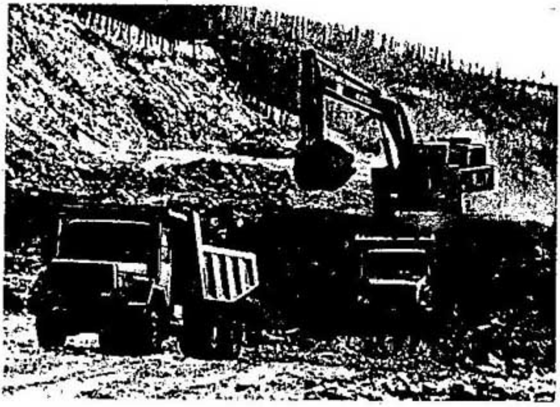
Conclusión

La mecánica es una amplia ciencia que representa una de las más importantes partes de la física, ciencia aún más extensa. Sólo hemos estudiado sus elementos. Muchos de los apartados de mecánica, por ejemplo, el movimiento de rotación de los sólidos o el movimiento oscilatorio, han quedado al margen de nuestros estudios. Algunos problemas de mecánica no están aún resueltos. A pesar de todo, el curso que hemos estudiado nos ofrece la posibilidad de contornear los rasgos característicos de esta ciencia, dicho sea con mayor precisión, de aquella parte de ella denominada mecánica clásica o bien de Newton, ya que sobre su base yacen las leyes de ese eminente sabio. Hemos visto que dichas leyes están expresadas en forma de correlaciones matemáticas entre una serie de magnitudes (cantidad de movimiento, aceleración, masa, fuerza, etc.). Se plantea la pregunta: ¿hasta qué grado son precisas las leyes de Newton?

LÍMITES DE APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON. Hasta finales del pasado siglo, no había la menor duda de que las leyes newtonianas eran justas en absoluto. No obstante, en el siglo XX fue aclarado que esas leyes no son del todo exactas. No se pueden aplicar cuando los cuerpos se mueven a grandes velocidades, comparables con la de la luz. Einstein, llamado Newton del siglo XX, pudo enunciar leyes de movimiento más generales que son justas también para el movimiento a velocidades próximas a la de la luz. Estas leyes son la base de la mecánica relativista o bien de la teoría de la relatividad. Las leyes de Newton son el corolario de dichas leyes, cuando las velocidades de los cuerpos son pequeñas, al compararlas con la de la luz.



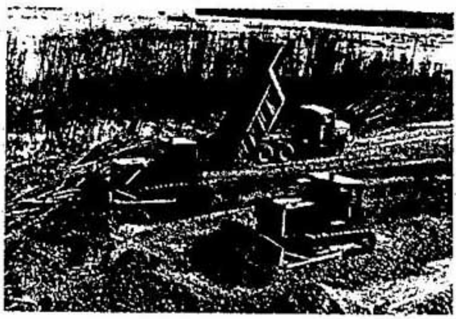
Recolección de hierbas para ensilar, con ayuda de la cosechadora de forrajes autopropulsada "Yaroslávets".



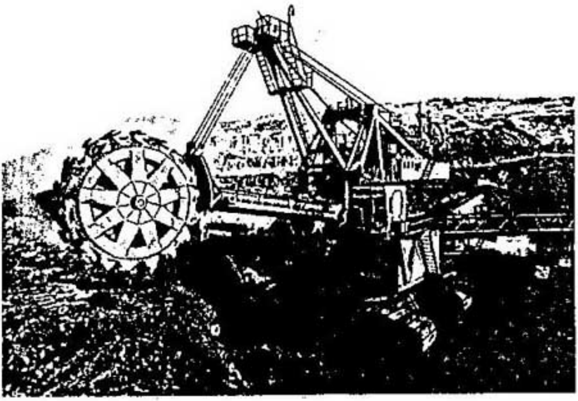
El laboreo de una trinchera para la vía férrea es realizado por excavadoras de cuchara.

Asimismo "fallan" las leyes de Newton al estudiar los movimientos de las partículas interatómicas. Para estos movimientos existe su "código" de leyes, llamado mecánica cuántica, del cual la mecánica clásica resulta ser también un caso particular. Es notorio que los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, deducidos de las leyes de Newton, son válidos tanto en la mecánica cuántica, como en la teoría de la relatividad.

Como vemos, la mecánica yace en la base de todas las ciencias naturales. Sólo hemos estudiado una pequeña parte de la mecánica clásica. Pero esta parte nos será necesaria y la aplicaremos durante todo el curso de física.



Con ayuda de bulldozeres se realizan movimientos de tierras.



Con excavadoras de rotor se efectúa la extracción del carbón.

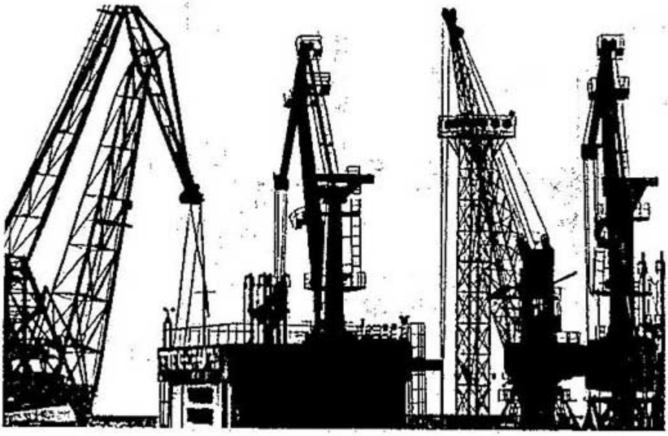
MECÁNICA Y MECANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN. Las leyes de Newton fueron establecidas en la época, en que el hombre comenzó a hacer uso de diferentes máquinas y aparatos que sustituían el trabajo manual. Hasta la fecha continúa el proceso de sustitución del duro trabajo manual por los correspondientes mecanismos. La mecanización ha entrado sólidamente en nuestra vida. Por ejemplo, muchos han olvidado y los escolares no saben, que varias decenas de años atrás, durante la construcción de los edificios, los ladrillos y otros materiales eran transportados por el obrero, subiendo por los andamios.

Ahora, este trabajo lo realizan las grúas, instaladas junto a cada edificio en construcción. Sólo conocemos el trabajo agotador de los sirgadores por el famoso cuadro "Los sirgadores", obra maestra del pincel del eminente pintor ruso Repin. Esta profesión ha desaparecido. Prácticamente, han desaparecido tales profesiones como cargador, fogonero, calandrador, etc., cuyo duro trabajo lo realizan hoy día las correspondientes máquinas mecánicas.

El famoso poeta ruso N. A. Nekrásov nos relata en su poema "La vía férrea" acerca del agotador trabajo de los obreros que construían el ferrocarril. En nuestros tiempos, en la construcción de las vías férreas se utilizan diferentes máquinas y mecanismos, tales como excavadoras, bulldozeres, máquinas para colocar la vía, etc.

Particular importancia han adquirido múltiples máquinas agrícolas que han transformado una de las más importantes ramas de la economía nacional, es decir, la agricultura. Una gran rama de la industria se ocupa de la producción de dichas máquinas.

En la propia industria de construcción de maquinaria, transcurre en nuestros días la revolución técnica. Los trabajos que antes se efectuaban por



Las grúas de pórtico son los principales ayudantes de los cargadores.

Sobre el terraplén de la vía férrea en construcción, los rieles se instalan con ayuda de máquinas colocadoras de la vía.

gran número de obreros de la más alta calificación, hoy se realizan en máquinas-herramientas automáticas, casi sin la participación del hombre.

Todas las máquinas, desde las más sencillas hasta aquellas que son sumamente complicadas, se calculan de acuerdo con las leyes de Newton y la explotación correcta de ellas requiere el conocimiento de dichas leyes. No ha habido caso que "fallen" las leyes newtonianas. En ello consiste la enorme importancia práctica de estas leyes.

Trabajos de laboratorio

1. Determinación de la aceleración de un cuerpo en caso de movimiento uniformemente variado

OBJETIVO DEL TRABAJO: calcular la aceleración con que rueda una bola por un canal inclinado. Con este fin, se mide la longitud del desplazamiento $\vec{s}$ que recorre la bola durante un tiempo t conocido. Como en caso de movimiento uniformemente variado sin velocidad inicial $s = at^2/2$, midiendo s y t se puede hallar la aceleración de la bola, mediante la fórmula:

$$a = \frac{2s}{t^2}. \tag{1}$$

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) canal; 2) bola; 3) cinta métrica; 4) metrónomo (o cronómetro); 5) soporte con acoplamientos y pata; 6) cilindro metálico.

Orden de realización del trabajo

1. Fijar el canal inclinado en el soporte, formando un pequeño ángulo con el horizonte (fig. 200). En el extremo inferior del canal, colocar el cilindro metálico.
2. Junto con el golpe del metrónomo soltar la bola en el extremo superior del canal, contar el número de golpes del metrónomo hasta el choque de la bola con el cilindro. Es cómodo realizar el experimento regulando el metrónomo a 120 golpes en un minuto.
3. Variando el ángulo de inclinación del canal hacia el horizonte, conseguir que entre los instantes en que se suelta la bola y ésta choca con el cilindro haya 4 golpes del metrónomo (3 intervalos entre los golpes).
4. Calcular el tiempo de movimiento de la bola.
5. Con la cinta métrica, determinar la longitud del desplazamiento $\vec{s}$ recorrido por la bola.

Ninguna medición se realiza con absoluta precisión. Las mediciones siempre se realizan con cierto error, ligado con la imperfección de los aparatos, el procedimiento elegido de medida y por otras causas. Hay una serie de métodos para apreciar la autenticidad del resultado de la medición. El más sencillo de ellos, aunque no el de mayor exactitud, es el cálculo del resultado medio aritmético de varias mediciones independientes de la magnitud que se determina. Esto es lo que proponemos hacer en este trabajo.

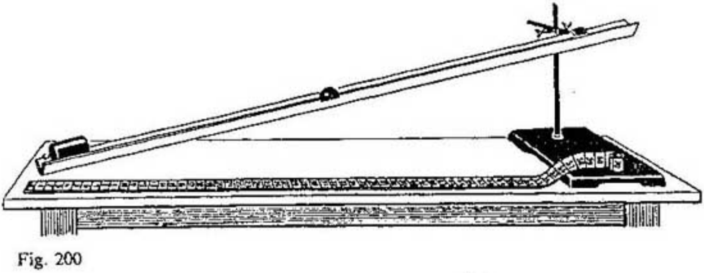


Fig. 200

16 - 948

6. Sin cambiar las condiciones del experimento, repetir 5–6 veces las mediciones de la longitud del desplazamiento s.

7. Empleando la fórmula (1), hallar la aceleración de la bola en cada experimento.

8. Determinar el valor medio aritmético de la aceleración.

9. Hallar la diferencia entre a_{med} y la aceleración de la bola medida en cada experimento. Éste es el error de cada medición individual de la aceleración Δa.

10. Calcular el valor medio aritmético del error con que se mide la aceleración.

11. Confeccionar la tabla de resultados de los experimentos:

№ del experimento	Número de golpes del metrónomo	t	s	a	a_{med}	$\Delta a = \lvert a_{med} - a \rvert$	Δa_{med}

12. Anotar el resultado de las mediciones en la forma $a = a_{med} \pm \Delta a_{med}$.

2. Medición de la rigidez de un muelle

OBJETIVO DEL TRABAJO: definir la rigidez de un muelle, midiendo los alargamientos de éste, al someterlo a diferentes valores de la fuerza externa que equilibra la fuerza elástica.

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) soporte con acoplamientos y pata; 2) muelle espiral; 3) juego de pesas; 4) regla con divisiones milimétricas.

Orden de realización del trabajo

1. Fijar en el soporte el extremo del muelle espiral (su otro extremo está equipado de una flecha-indicadora y un gancho, fig. 201).

2. Junto al muelle o detrás de él instalar y fijar la regla con divisiones milimétricas.

3. Marcar y anotar la división de la regla frente a la cual se encuentra la flecha-indicadora del muelle.

4. Colgar del muelle una pesa de masa conocida y medir el alargamiento producido por ella.

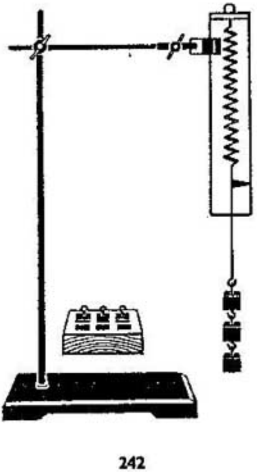


Fig. 201

5. A la primera pesa añadir la segunda, tercera, etc., anotando cada vez el alargamiento Δl del muelle.

6. Para cada valor de la masa de la pesa colgada calcular el valor de la rigidez del muelle de acuerdo con la fórmula

$$k = \frac{mg}{\Delta l},$$

donde m es la suma de las masas de las pesas colgadas; g, el módulo de la aceleración de la caída libre y Δl, el alargamiento del muelle.

7. Calcular la media aritmética de los valores hallados de la rigidez del muelle y el error medio de las mediciones.

8. Confeccionar la tabla de los resultados:

№ del experimento	m	Δl	$k = \frac{mg}{\Delta l}$	k_{med}	$\Delta k = \lvert k_{med} - k \rvert$	Δk_{med}

9. Escribir el resultado de las mediciones en la forma $k = k_{med} \pm \Delta k_{med}$.

3. Determinación del coeficiente de rozamiento de deslizamiento

OBJETIVO DEL TRABAJO: determinar el coeficiente de rozamiento de una barreta de madera que resbala por una regla de madera. Con este fin, mediante un dinamómetro se mide la fuerza con la que hay que tirar de la barreta cargada con pesas a lo largo de una superficie horizontal, para que aquélla se mueva uniformemente. Por su módulo, esta fuerza es igual a la de rozamiento $\vec{F}_{roz}$ que actúa sobre la barreta. Con ayuda de ese mismo dinamómetro, podemos hallar el peso de la barreta con las pesas $\vec{P}$, que es igual a la fuerza de la presión normal de la barreta contra la superficie por la que se desliza. Después de definir de este modo F_{roz} y P, es posible hallar el coeficiente de rozamiento aplicando la fórmula:

$$\mu = \frac{F_{roz}}{P}. \tag{1}$$

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) regla; 2) cinta métrica; 3) dinamómetro; 4) barreta de madera; 5) juego de pesas; 6) soporte con acoplamientos y pata.

Orden de realización del trabajo.

1. Colocar la barreta en la regla de madera dispuesta horizontalmente. Sobre la barreta colocar una pesa.
2. Fijar el dinamómetro a la barreta, tirar de él lo más uniformemente posible a lo largo de la regla. Al mismo tiempo observar las indicaciones del dinamómetro.
3. Pesar la barreta y la pesa.
4. Haciendo uso de la fórmula (1) hallar el coeficiente de rozamiento. El error de los experimentos se determina del mismo modo que en el trabajo 1.
5. Repetir el experimento, colocando sobre la barreta varias pesas.
6. Determinar el valor medio aritmético de los coeficientes de rozamiento hallados en diferentes experimentos.
7. Definir el error en cada experimento, es decir, la diferencia entre μ_{med} y los valores de μ obtenidos en distintos experimentos.
8. Determinar la media aritmética de los errores de los experimentos $\Delta\mu_{med}$.

9. Confeccionar la tabla de los resultados de los experimentos:

№ del experimento	Indicaciones del dinamómetro, F_{roz}	P	$\mu = \frac{F_{roz}}{P}$	μ_{med}	$\Delta\mu = \lvert\mu_{med} - \mu\rvert$	$\Delta\mu_{med}$

10. Anotar el resultado de las mediciones en la forma $\mu = \mu_{med} \pm \Delta\mu_{med}$.

4. Estudio del movimiento de un cuerpo describiendo una parábola

OBJETIVO DEL TRABAJO: estudiar la trayectoria de una bola, a la que se comunicó velocidad inicial en dirección horizontal y que rueda después por un plano inclinado.

Si la bola se ha lanzado horizontalmente a lo largo de un plano inclinado, ella se mueve describiendo una parábola (fig. 202) (véase 6.3). Cuando un punto se mueve por una parábola, la proyección de dicho punto sobre el eje X se mueve uniformemente, mientras que sobre el eje Y, en movimiento uniformemente variado. Nos podemos cerciorar de esto, investigando la trayectoria de movimiento de la bola.

Tracemos los ejes de coordenadas X e Y, tomando como origen de coordenadas la posición inicial de la bola (fig. 203). Eligiendo en el eje X cierto segmento OA, lo dividimos en varias partes iguales Ox_1, x_1x_2, ... Desde los puntos de división trazamos perpendiculares hasta la intersección con la trayectoria de movimiento de la bola. A continuación, desde los puntos donde se cruzan estas perpendiculares con la trayectoria de movimiento, trazamos perpendiculares al eje Y: y_1, y_2, ..., son las coordenadas de la bola en el eje Y en aquellos momentos de tiempo, cuando las coordenadas de ésta a lo largo del eje X eran x_1, x_2, ...

A lo largo del eje X la proyección de la bola pasa los segmentos de una misma longitud Ox_1, x_1x_2, ..., en iguales intervalos de tiempo. A lo largo del eje Y la proyección de la bola se encuentra en movimiento uniformemente variado, por eso la diferencia entre las distancias, que recorre a lo largo del eje Y durante los consecutivos intervalos iguales de tiempo, es la misma. De esto debemos cerciorarnos en el experimento.

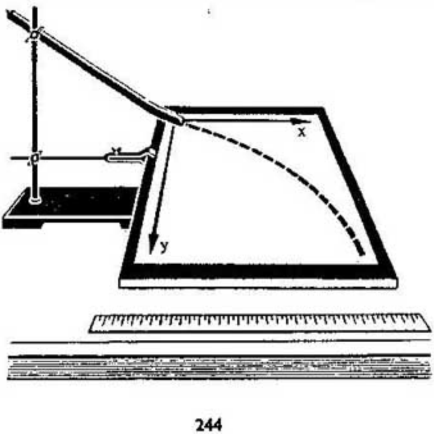


Fig. 202

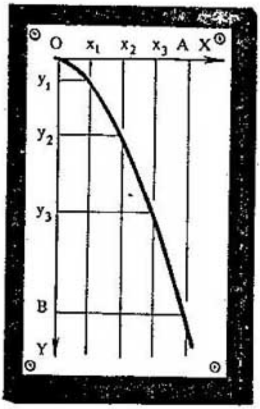


Fig. 203

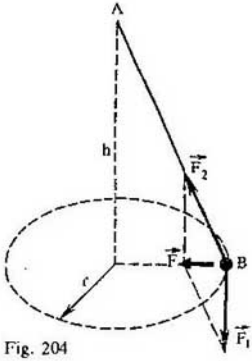


Fig. 204

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) cinta métrica; 2) soporte con acoplamientos y pata; 3) canal para lanzar la bola; 4) tabla de contrachapado; 5) bola; 6) bote con vaselina; 7) papel; 8) chinches; 9) papel de filtrar.

Orden de realización del trabajo

1. Con ayuda del soporte fijar la tabla de contrachapado bajo un ángulo, que con el plano de la mesa forme unos 30°. En la pata se fija el saliente del canal (véase la fig. 202). El extremo doblado del canal debe ser horizontal.
2. Con chinches fijar una hoja de papel en la tabla.
3. Engrasar la bola con vaselina y soltarla en el canal. Al rodar por el papel, dejará en él huellas oscuras.
4. Frotar la bola con papel de filtrar.
5. Trazar con lápiz la curva a lo largo de las huellas de la bola.
6. Trazar en el papel los ejes de coordenadas y marcar en ellos las coordenadas de los puntos de la curva después de intervalos consecutivos iguales de tiempo. Medir la longitud de los sectores entre las coordenadas consecutivas de la bola a lo largo del eje Y.
7. Cerciorarse de que

$$y_1y_2 - Oy_1 = y_3y_2 - y_2y_1 = By_3 - y_3y_2.$$

8. Repetir la construcción, dividiendo el segmento OA en mayor cantidad de partes iguales.

5. Estudio del movimiento de un cuerpo sobre una circunferencia bajo la acción de varias fuerzas

OBJETIVO DEL TRABAJO: determinar la aceleración centrípeta de la bola de un péndulo cónico.

Los caballitos examinados en 4.7 (véase la fig. 86) son, precisamente, un péndulo cónico. En el laboratorio, en lugar del "pasajero" se mueve una bola suspendida del soporte con ayuda de un hilo (fig. 204).

En la fig. 204 se muestra el esquema del experimento. La bola se mueve describiendo la circunferencia de radio r, el hilo AB, al que está fijada la bola, describe la superficie del cono. Como fue indicado en 4.7, sobre la bola actúa la fuerza

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

donde $\vec{F}_1 = m\vec{g}$ es la fuerza de gravedad a que está sometida la bola; $\vec{F}_2$, la tensión del hilo.

La fuerza $\vec{F}$ es la que comunica a la bola la aceleración centrípeta.

El valor de a se calcula con la fórmula

$$a = \frac{v^2}{r},$$

donde v es la velocidad lineal de la bola. Pero la medición directa de esta velocidad es dificultosa. Resulta más fácil medir el período T de las oscilaciones del péndulo, que mediante una sencilla correlación está ligado con la velocidad lineal v (véase 3.2):

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Por lo tanto,

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \qquad (1)$$

Midiendo T y r, hallamos a.

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) cinta métrica; 2) reloj con aguja segundera; 3) soporte con acoplamientos y un aro; 4) bola; 5) hilo con un nudo en su extremo.

Orden de realización del trabajo[1)]

1. El hilo con el nudo en el extremo se hace pasar por el orificio de la bola y se suspende del aro en el soporte.

2. Uno de los escolares coge con dos dedos el hilo en el punto de suspensión y pone en rotación el péndulo.

3. El segundo escolar mide con la cinta métrica el radio r de la circunferencia por la que se mueve la bola. (La circunferencia puede trazarse de antemano en un papel y luego hacer que el péndulo se mueva sobre dicha circunferencia.)

4. Con ayuda del reloj con aguja segundera determinar el período T de rotación del péndulo.

Para ello, el escolar que hace girar el péndulo, al compás de éste, dice en voz alta: cero, cero, etc. El segundo escolar con el reloj en la mano, después de elegir con la aguja segundera un momento cómodo para comenzar el registro, pronuncia: "cero", acto seguido el primer escolar en voz alta cuenta el número de revoluciones. Después de contar 30–40 revoluciones (N), se fija el intervalo de tiempo pasado Δt. El período de las oscilaciones del péndulo $T = \Delta t/N$.

5. Mediante la fórmula (1) calcular la aceleración centrípeta.

6. Confeccionar la tabla de resultados:

№ del experimento	r	N	Δt	$T = \frac{\Delta t}{N}$	$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

1) Este trabajo lo realizan dos escolares.

6. Aclaración de las condiciones de equilibrio de una palanca

OBJETIVO DEL TRABAJO: establecer las correlaciones entre los momentos de las fuerzas, aplicadas a los brazos de una palanca durante su equilibrio. Con este fin, a uno de los brazos de la palanca se cuelgan una o varias cargas, mientras que al otro se fija un dinamómetro (fig. 205). Con ayuda de éste se mide el módulo de la fuerza $\vec{F}$ que es preciso aplicar para que la palanca se encuentre en equilibrio. A continuación, mediante ese mismo dinamómetro, se mide el módulo del peso de las cargas $\vec{P}$. Las longitudes de los brazos de la palanca se miden con una regla. Después de esto se definen los valores absolutos de los momentos de las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{P}$, que son iguales a los productos Fl_2 y Pl_1. Los momentos obtenidos de las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{P}$ se comparan entre sí.

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) regla de medición; 2) dinamómetro; 3) juego de cargas; 4) soporte con acoplamientos; 5) palanca.

Orden de realización del trabajo

1. Instalar la palanca en el soporte y equilibrarla en posición horizontal con las tuercas móviles situadas en sus extremos.
2. Colgar una carga en cierto punto de uno de los brazos de la palanca.
3. Fijar el dinamómetro en el otro brazo de la palanca y determinar la fuerza que es necesario aplicar sobre ella para que la misma se encuentre en equilibrio.
4. Con la regla medir la longitud de los brazos de la palanca.
5. Determinar con el dinamómetro el peso de la carga $\vec{P}$.
6. Hallar los valores absolutos de los momentos de las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{P}$.
7. Las magnitudes halladas se anotan en la tabla:

№ del experimento	l_1	l_2	P	F	Pl_1	Fl_2

8. Comparar los momentos de las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{P}$.
9. Repetir el experimento varias veces, fijando en la palanca diversa cantidad de cargas y cambiando los brazos de la palanca.

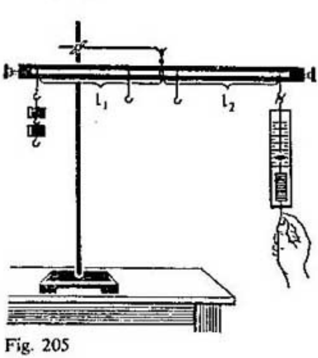


Fig. 205

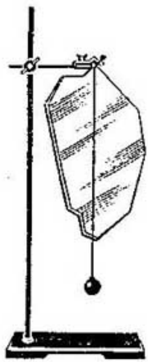


Fig. 206

7. Determinación del centro de gravedad de una placa plana

OBJETIVO DEL TRABAJO: hallar el punto que sirve de centro de gravedad de la placa.

Si suspendemos una placa plana de algún punto, se dispondrá de tal modo, que la recta vertical trazada por el punto de suspensión (fig. 206), pasará por el centro de gravedad. Esta propiedad permite hallar dicho centro en las placas planas por vía experimental. Con este fin, es preciso colgar la placa de cualquier punto, trazar en ella una recta vertical que pase por el punto de suspensión. A continuación, se realizan esas mismas operaciones, colgando la placa de otro punto. El punto de intersección de las rectas nos ofrece el centro de gravedad de la placa.

Para cerciorarse de esto, la placa se puede colgar del tercer punto. La recta vertical que pasa por el punto de suspensión, debe también atravesar el punto de intersección de las dos rectas, primeras.

También es posible equilibrar la placa en la punta de un alfiler. Aquélla se encontrará en equilibrio si el punto de apoyo coincide con el centro de gravedad.

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) regla; 2) placa plana de forma arbitraria; 3) plomada; 4) alfiler; 5) soporte con pata y acoplamiento; 6) tapón de corcho.

Orden de realización del trabajo

1. En la pata del soporte se fija el tapón en posición horizontal.
2. En el alfiler, que se clava en el tapón, se suspenden la placa y la plomada.
3. Con un lápiz bien afilado se marca la línea de la plomada en los bordes superior e inferior de la placa.
4. La placa se descuelga y se traza una línea que une los puntos marcados.
5. Repetir el experimento colgando la placa de otro punto.
6. Cerciorarse de que el punto de intersección de las rectas trazadas es el centro de gravedad de la placa.

8. Comparación del trabajo realizado por una fuerza y la variación de la energía del cuerpo

OBJETIVO DEL TRABAJO: comparar dos magnitudes: el trabajo de la fuerza aplicada al cuerpo y la variación de su energía potencial.

INSTRUMENTOS Y MATERIALES: 1) dinamómetro con fijador; 2) regla de medición; 3) bola en un hilo de 25 cm de longitud; 4) soporte con acoplamientos y pata.

Para efectuar el trabajo se utiliza la instalación mostrada en la fig. 207. Es un dinamómetro fijado en el soporte con el fijador *1*. El muelle del dinamómetro acaba en un espárrago de alambre con gancho. El fijador (a escala aumentada se muestra aparte y viene marcado con la cifra *2*) es una ligera placa hecha de corcho (sus dimensiones son $5 \times 7 \times 1{,}5$ mm), cortada con un cuchillo hasta el centro. La placa se asienta en el espárrago de alambre del dinamómetro. El fijador debe desplazarse a lo largo del espárrago con cierto rozamiento, que debe ser suficiente para que el primero no caiga por sí solo. De esto hay que convencerse antes de empezar el trabajo. Con este fin, el fijador se instala junto al borde inferior de la escala sobre la grapa de limitación. Seguidamente, el muelle se alarga y se suelta.

Junto con el espárrago de alambre, el fijador debe subir, marcando de este modo el alargamiento máximo del muelle.

Orden de realización del trabajo

1. La bola se suspende por medio de un hilo resistente en el gancho del dinamómetro y se mide su peso $P = mg$ (el peso se lee en la escala del dinamómetro).
2. Elevar la bola con la mano, descargando así el muelle, y colocar el fijador

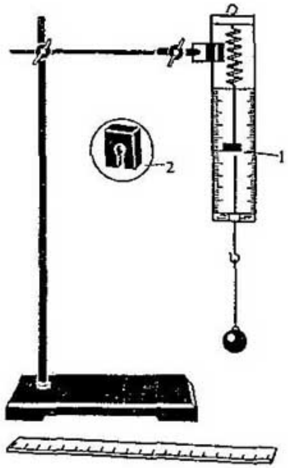


Fig. 207

abajo, junto a la grapa.

3. Subir la bola hasta la altura del gancho y soltarla. Al caer, la bola estira el muelle. Después la bola se quita y por la posición del fijador se mide con la regla el alargamiento máximo $\Delta l_{máx}$ del muelle. Del mismo modo, con la regla se mide la altura h de la caída de la bola (es igual a la largura del hilo más el alargamiento del muelle).

4. Estirando el muelle con la mano, hasta que el fijador haga contacto con la grapa limitadora, se lee en la escala el valor de la fuerza elástica del muelle. Ésta corresponde a la fuerza elástica $F_{máx}$ para el alargamiento máximo del muelle.

La fuerza media que actúa sobre la bola durante su caída, es igual a $F_{máx}/2$.

5. Calcular el trabajo de la fuerza elástica del muelle utilizando la fórmula

$$A = \frac{F_{máx}}{2} \Delta l_{máx}$$

y la variación (disminución) de la energía potencial por la fórmula

$$\Delta E_p = mgh = Ph.$$

6. Anotar los resultados en la tabla:

№ del experimento	$P = mg$	$\Delta l_{máx}$	$F_{máx}$	h	$A = \frac{F_{máx}}{2} \Delta l_{máx}$	$\Delta E_p = mgh$

7. Comparar los datos de las dos últimas columnas en la tabla.

Soluciones de los ejercicios

Ejerc. 1. 1. $s_x = 4$ m; $s_y = -3$ m. 2. $x = 2{,}2$ m; $y = 4$ m; 6 m; 30°. 3. 13 km.
Ejerc. 2. 1. $\approx 3{,}5$ km al sureste; ≈ 42 min. 2. 90 km/h. 3. 3,4 km.
Ejerc. 3. 1. 7 m. 2. 0,1 m/s.
Ejerc. 4. 1. 950 km/h; 850 km/h. 2. 15 km. 4. $x = 72$ km; $y = 1440$ km; $z = 8$ km. El eje OX está dirigido de occidente a oriente, el eje OY, de sur a norte, el eje OZ, verticalmente hacia arriba.
Ejerc. 5. 1. 70 km/h. 2. $\approx 54{,}5$ km/h.
Ejerc. 6. 1. 10 s. 2. $-2{,}5$ m/s^2. 3. 6,25 s. 4. 64800 km/h.
Ejerc. 7. 1. a) 27 m; b) 4 s; 8 m. 2. En el punto A $v_{1x} = v_{2x} = 2$ m/s; $v_{3x} = 0{,}5$ m/s. En el punto B $v_{1x} = v_{3x} = 2$ m/s; $v_{2x} = 8$ m/s; $a_{1x} = 0$; $a_{2x} = 2$ m/s^2; $a_{3x} = 0{,}5$ m/s^2; 3. $a_{1x} = 1$ m/s^2; $a_{2x} = 0{,}4$ m/s^2; $a_{3x} = -0{,}5$ m/s^2. 4. $OA = 9$ m/s; $OB = 3$ m/s; $OC = 4{,}5$ s; $a_{1x} = a_{2x} = 1$ m/s^2; $a_{3x} = -2$ m/s^2. 5. $\approx 6{,}7$ m/s^2; ≈ 746 m. 6. 0,6 m. 7. $\approx 2{,}4$ km. 8. 15876 m.
Ejerc. 8. 1. 3,75 m/s^2. 2. 500 m. 3. ≈ 700 m.
Ejerc. 9. 1. $\approx 1{,}3$ m/s. 2. $\approx 57{,}3$ cm. 3. $\approx 2 \cdot 10^{-7}$ rad/s; 30 km/s. 4. $6{,}1 \cdot 10^{-3}$ m/s; $\approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ rad/s. 5. 0,00007 rad/s; 448 m/s.
Ejerc. 10. 1. $\approx 3{,}14$ m/s. 2. 2,25 m/s^2. 3. $\approx 7{,}7$ km/s. 4. $\approx 67{,}8$ km/h. 5. $\approx 0{,}63$ m/s; 1 s. 6. $\approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.
Ejerc. 11. 1. 6 m/s. 2. 2 cm; 6 cm. 3. 12 cm.
Ejerc. 12. 1. 1. 2. 30 cm/s.
Ejerc. 13. 1. 9,8 N. 2. $4 \cdot 10^3$ N. 3. 2400 N. 4. Error: el tiempo es no 2, sino $\sqrt{2}$ veces menor.
Ejerc. 14. 1. No. 2. 0,25 m/s^2; 0,2 m/s^2. 3. ≈ 16 N.
Ejerc. 15. 1. 49 N/m. 2. 10 cm.
Ejerc. 16. 1. $\approx 0{,}7$ mg. 2. 0,16 N. 3. $1{,}9 \cdot 10^{20}$ N. 4. ≈ 585 veces. 5. ≈ 2600 km.
Ejerc. 17. 1. 0,5 kg. 2. 2600 m. 3. 1,55 N; 6 veces menor. 4. 4 m/s^2.
Ejerc. 18. 1. ≈ 49 N. 2. ≈ 1100 kg. 3. 75 N.
Ejerc. 19. 1. 78,4 m. 2. $\approx 10{,}5$ s; ≈ 103 m/s. 3. 1 s; 9,8 m/s. 4. $\approx 11{,}5$ m/s. 5. ≈ 20 m/s; ≈ 15 m. 7. ≈ 46 m. 8. ≈ 78 m; $\approx 39{,}2$ m/s. 9. $\approx 3{,}25$ m; ≈ -8 m/s; $\approx 1{,}3$ s; $\approx 0{,}8$ m. 10. 75 m; 10 m/s; -10 m/s. 11. Dos veces. 12. -12 m/s.
Ejerc. 20. 1. $\approx 1{,}3$ m; 1 s; $\approx 8{,}7$ m. 2. $\approx 2{,}8$ m.
Ejerc. 21. 1. En todos los casos 4900 N. 2. a) 1010 N; b) 980 N; c) 940 N; d) 0. 3. Disminuye en 5600 N. 4. $\approx 9{,}77$ N.
Ejerc. 22. 1. 89 min. 2. $\approx 5{,}63$ km/s. 3. ≈ 4700 km. 4. 38000 km.
Ejerc. 23. 1. 10 m/s. 2. $\approx 3{,}3$ s; ≈ 33 m.
Ejerc. 24. 2. 2 m/s. 3. $\approx 30°$. 4. ≈ 10 m/s^2. 5. $\approx 5{,}5$ m/s^2.
Ejerc. 25. 1. No se puede, ≈ 50 km/h. 2. $\approx 70{,}5$ km/h.
Ejerc. 26. 1. ≈ 865 N; 1000 N; ≈ 700 N; 500 N; 0. 2. $\approx 11{,}6$ N; $\approx 23{,}2$ N. 3. 3400 N. 4. Habrá. 5. ≈ 1730 N; 2000 N.
Ejerc. 27. 1. 0,1 kg. 2. 0,2 kg.
Ejerc. 28. 1. 10 kg·m/s. 2. a) $3 \cdot 10^4$ kg·m/s; b) $6 \cdot 10^4$ kg·m/s. 3. 0,2 kg·m/s; 2 N. 4. ≈ 20000 kg·m/s; ≈ 1000 kg. 5. 3,4 s.
Ejerc. 29. 1. 5,5 m/s. 2. 0,3 m/s. 3. 4,5 kg.
Ejerc. 30. 1. 2774 J. 2. 36,75 kJ. 3. ≈ 77 kJ. 4. $\approx 1{,}5$ J.
Ejerc. 31. 1. 500 J; $\approx 0{,}7$. 2. ≈ 1500 J; ≈ 250 N. 3. $1{,}19 \cdot 10^5$ J.
Ejerc. 32. 1. 180 J; ≈ 11 m/s. 2. $4{,}5 \cdot 10^8$ J. 3. $4{,}16 \cdot 10^{10}$ J. 4. ≈ 40 N; por el radio; $A = 0$. 5. ≈ 200000 J; ≈ 1000 kg. 6. 34 m.

Ejerc. 33. 1. ≈ 120 J. 2. 11,25 kJ. 3. $2{,}74 \cdot 10^5$ J. 4. $2{,}74 \cdot 10^5$ J; 1372 kJ.
Ejerc. 34. 1. 8 J. 2. 16,5 J. 3. 0,08 J. 4. Por el signo. 5. $2{,}25 \cdot 10^{-2}$ J. 6. 8 J.
Ejerc. 35. 1. ≈ 45 m. 2. 2000 m. 3. 294 J; 588 J. 4. $\approx 229{,}5$ kg. 5. $\approx 0{,}01$ m. 6. $\approx 1{,}58$ m/s. 7. $-3{,}75$ m/s; 6,25 m/s.
Ejerc. 36. 1. ≈ 240 J. 2. ≈ 2713 J. 3. 36 km/h. 4. La energía cinética disminuyó en 1500 J. 5. ≈ 700 kJ. 6. Estaba en movimiento por el aire. 7. ≈ 1790 J.
Ejerc. 37. 1. 7200 N. 2. 8 t. 3. 360 kJ. 4. $7{,}8 \cdot 10^{13}$ J. 5. 20 kW.
Ejerc. 38. 1. ≈ 6 t. 2. 5700 N. 3. ≈ 77 t. 4. $\approx 20\%$.
Ejerc. 39. 1. 5652 m^3. 2. $\approx 0{,}9$ m. 3. 5,66 cm.

Índice alfabético de autores y materias

A NUESTROS LECTORES:

MIR edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.
Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Para el curso completo de física escolar, MIR publica:

B. Bújovtsev, Yu. Klimontóvich, G. Miákishev. "Física 3"

El manual contiene la exposición sistemática de los fenómenos térmicos, de la física molecular y de los fundamentos de la electrodinámica.

En el libro se profundizan y desarrollan las nociones acerca de la estructura de la materia, expuestas en "Física 1" y "Física 2", además se muestra que todos los fenómenos térmicos se subordinan a determinadas leyes. El descubrimiento de estas leyes ha permitido utilizarlas en la práctica y la técnica con la máxima eficacia.

La teoría cinético-molecular se explica ateniéndose a los fenómenos térmicos que tienen lugar en los cuerpos macroscópicos y las propiedades internas de éstos, así como basándose en la idea de que todos los cuerpos están constituidos por partículas independientes que se mueven caóticamente. Se dan los principales conceptos sobre la termodinámica y sus principios básicos, que fueron establecidos por vía experimental, asimismo se analizan las bases de la mecánica estadística.

En el apartado dedicado a la electrodinámica se introducen las ideas básicas acerca de la naturaleza de los fenómenos electromagnéticos. Se analizan los mecanismos de la corriente eléctrica en diferentes medios, incluyendo las descargas en un gas, los haces electrónicos en el vacío, los semiconductores. En la parte dedicada al magnetismo se hace hincapié al descubrimiento de la esencia de la interacción entre la materia y los campos eléctrico y magnético, así como de su interrelación.

El manual está dotado de un extenso material ilustrativo, contiene muchos ejercicios con las correspondientes soluciones, al final se dan algunos trabajos de laboratorio para los alumnos.

G. Miákishev, B. Bújovtsev. "Física 4"

En el manual se exponen los cursos de oscilaciones y ondas, la óptica, la física atómica y nuclear.

En el apartado sobre las oscilaciones y ondas se analizan las oscilaciones mecánicas (libres y forzadas); las oscilaciones eléctricas asimismo las libres y las forzadas, estas últimas son las que producen la corriente eléctrica alterna; las ondas mecánicas y el sonido; las ondas electromagnéticas.

En la parte dedicada a la óptica se exponen las bases de la óptica geométrica, de las ondas luminosas, de la teoría especial de la relatividad, de las radiaciones y los espectros, así como se estudian las acciones de la luz y los cuantos luminosos.

En el apartado de física atómica y nuclear se trata de la estructura del átomo, la mecánica cuántica y la física del núcleo atómico con las partículas que lo integran.

Los autores profundizan ya en un nivel teórico más elevado las nociones sobre la estructura de la materia, las interacciones magnéticas; se introduce la noción sobre las diversas partículas elementales y sus propiedades.

El manual contiene muchas ilustraciones, ejercicios e indicaciones para realizar los trabajos de laboratorio.